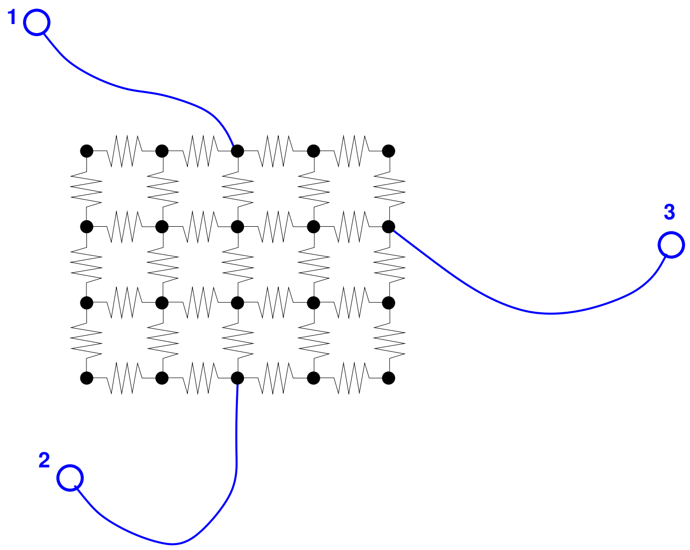
SME0305 - 2014

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176, gustavo.buscaglia@gmail.com

Lista 5 (24 de março de 2014)

Circuito com três conexões externas



Vamos supor ter um circuito arbitrário com três conexões externas. Seguindo o raciocínio das aulas anteriores, vamos começar nos perguntando **quais as correntes $\mathbb{I}_1$, $\mathbb{I}_2$ e $\mathbb{I}_3$ que aparecem (positivas entrando) quando impomos os valores $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$ e $\mathbb{V}_3$ nos contatos?**

Exercício: Pela linearidade, existe uma matriz $\underline{\underline{\mathbb{A}}}$, 3×3, tal que

$$\underline{\mathbb{I}} \; = \; \underline{\underline{\mathbb{A}}} \, \underline{\mathbb{V}}$$

como determinar $\underline{\underline{\mathbb{A}}}$?

Resposta: A determinação utiliza justamente a linearidade:

- Aplicar os potenciais $\underline{\mathbb{V}} = (1, 0, 0)$, as correntes que resultam são

  $$\mathbb{I}_1 = \alpha, \mathbb{I}_2 = \beta, \mathbb{I}_3 = \gamma$$

  por tanto a primeira coluna de $\underline{\underline{\mathbb{A}}}$ é

  $$\underline{\underline{\mathbb{A}}} \; = \; \begin{pmatrix} \alpha & ? & ? \\ \beta & ? & ? \\ \gamma & ? & ? \end{pmatrix}$$

- Aplicar agora os potenciais $\underline{\mathbb{V}} = (0, 1, 0)$ para colocar as correntes obtidas como segunda coluna de $\underline{\underline{\mathbb{A}}}$.
- Observar que a soma de cada linha deve ser zero, por tanto,

  ```
  AA(:,3)=-AA(:,1)-AA(:,2)
  ```

Dessa maneira podemos substituir o circuito todo pela matriz $\underline{\underline{\mathbb{A}}}$ de entradas-saidas!!!

Exercício: Entenda porque o programa seguinte calcula a matriz $\underline{\underline{\mathbb{A}}}$ de um circuito arbitrário, con conexões externas nos nós `n1`, `n2` e `n3`.

```
%Matriz AA do circuito, contatos em n1,n2,n3
%
A  = matVtoI(nv,nc,con,R);
At = A;
At(n1,:)=zeros(1,nv); At(n1,n1)=1;
At(n2,:)=zeros(1,nv); At(n2,n2)=1;
At(n3,:)=zeros(1,nv); At(n3,n3)=1;

b=zeros(nv,1); b(n1)=1;
x=At\b;
AA(1,1)=A(n1,:)*x;
AA(2,1)=A(n2,:)*x;
AA(3,1)=A(n3,:)*x;
b=zeros(nv,1); b(n2)=1;
x=At\b;
AA(1,2)=A(n1,:)*x;
AA(2,2)=A(n2,:)*x;
AA(3,2)=A(n3,:)*x;
b=zeros(nv,1); b(n3)=1;
x=At\b;
AA(1,3)=A(n1,:)*x;
AA(2,3)=A(n2,:)*x;
AA(3,3)=A(n3,:)*x;
```

Calcule a matriz $\underline{\underline{\mathbb{A}}}$ numéricamente para um circuito específico de sua escolha.

Resposta: As primeiras cinco linhas calculam a matriz $\underline{\underline{\widetilde{A}}}$ do circuito quando os potenciais em `n1`, `n2` e `n3` estão impostos.
As seguintes duas linhas,

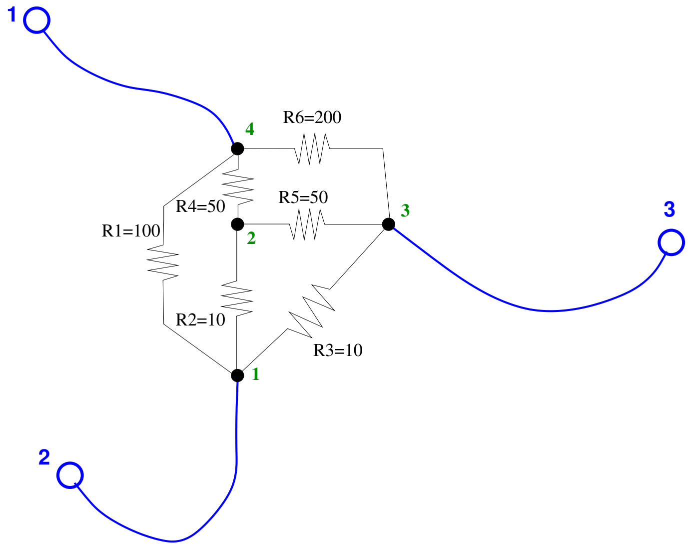
```
b=zeros(nv,1); b(n1)=1;
x=At\b;
```

geram o lado direito $\underline{b}$ correspondente a (a) desbalanço de corrente zero em todos os nós não conectados, (b) `V(n1)=1`, e (c) `V(n2)=V(n3)=0`.
O resultado de `x=At\b` **é o vetor de voltagens nodais no circuito**. **Aquí devemos entender que a corrente $\mathbb{I}_1$ não é outra coisa que o desbalanço de correntes no nó `n1`, com sinal positivo quando entra no circuito.**
Por isto, calculamos $\alpha = \mathbb{I}_1$ multiplicando a linha `n1` de $\underline{\underline{A}}$ pelo `x` obtido.

```
AA(1,1)=A(n1,:)*x;
```

Depois calculamos β e γ analogamente, obtendo a primeira coluna de $\underline{\underline{\mathbb{A}}}$.
O procedimento é repetido para calcular as segunda e terceira colunas.

Como exemplo concreto, vejamos o que acontece com o seguinte circuito:



para o qual

```
nv=4; nc=6;
con=[1 4; 1 2; 1 3; 2 4; 2 3; 4 3];
R=[100; 10; 10; 50; 50; 200];
n1=4; n2=1; n3=3;
A = matVtoI(nv,nc,con,R)
A =
   0.2100000  -0.1000000  -0.1000000  -0.0100000
  -0.1000000   0.1400000  -0.0200000  -0.0200000
  -0.1000000  -0.0200000   0.1250000  -0.0050000
  -0.0100000  -0.0200000  -0.0050000   0.0350000
```

com as operações escritas antes obtemos:

```
AA =

   0.0321429  -0.0242857  -0.0078571
  -0.0242857   0.1385714  -0.1142857
  -0.0078571  -0.1142857   0.1221429
```

Isto indica que

$$0.0321429\,\mathbb{V}_1 - 0.0242857\,\mathbb{V}_2 - 0.0078571\,\mathbb{V}_3 = \mathbb{I}_1 \quad (1)$$
$$-0.0242857\,\mathbb{V}_1 + 0.1385714\,\mathbb{V}_2 - 0.1142857\,\mathbb{V}_3 = \mathbb{I}_2 \quad (2)$$
$$-0.0078571\,\mathbb{V}_1 - 0.1142857\,\mathbb{V}_2 + 0.1221429\,\mathbb{V}_3 = \mathbb{I}_3 \quad (3)$$

Vamos a ver se efetivamente essa matriz prediz o comportamento do circuito total em uma situação qualquer: Consideremos o caso no qual colocamos $\mathbb{V}_2 = 0$, e injetamos $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2 = 0.5$ A.
Do sistema de equações acima obtemos

$$\mathbb{V}_1 = 0 \quad (4)$$
$$-0.0242857\,\mathbb{V}_1 + 0.1385714\,\mathbb{V}_2 - 0.1142857\,\mathbb{V}_3 = 0.5 \quad (5)$$
$$-0.0078571\,\mathbb{V}_1 - 0.1142857\,\mathbb{V}_2 + 0.1221429\,\mathbb{V}_3 = 0.5 \quad (6)$$

```
AAt=AA;
AAt(1,:)=0;AAt(1,1)=1;
bb=zeros(3,1);bb(2)=0.5;bb(3)=0.5;
VV=AAt\bb
VV =
    0.00000
   30.59150
   32.71719
```

Isto é, é predito $\underline{\mathbb{V}} = (0, 30.5915, 32.71719)^T$.
Comparemos com o que prediz o circuito inteiro, para isto fazemos

```
At=A;
At(n1,:)=0;At(n1,n1)=1;
b=zeros(nv,1);b(n2)=0.5;b(n3)=0.5;
V=At\b
V =
   30.59150
   26.52495
   32.71719
    0.00000
```

Pode se ver que as voltagens são as mesmas, com a grande diferença de que no primeiro cálculo apenas resolvemos um sistema 3×3 e no segundo um sistema `nv` $\times$ `nv`!!

Observação: Note que a equação (4), que é consequência das condições externas impostas, não invalida a equação (1). Na verdade, (4) é uma **equação adicional** para as 4 incógnitas $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$, $\mathbb{V}_3$ e $\mathbb{I}_1$. O que acontece é que $\mathbb{I}_1$ aparece apenas em uma equação, e por tanto podemos resolver (4)-(6) para calcular $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$ e $\mathbb{V}_3$, e só depois substituir em (1) para calcular $\mathbb{I}_1$.

Exercício: Suponha que se tem um circuito de três conexões, do qual se conhece a matriz $\underline{\underline{\mathbb{A}}}$.
Quanto vale $\mathbb{I}_3$ quando o contato 1 se deixa sem conectar, no contato 2 se impõe $\mathbb{V}_2 = v^*$, e no contato 3 se impõe $\mathbb{V}_3 = -v^*$?

Exercício: Quanto valem $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$ e $\mathbb{V}_3$ quando se coloca os contatos 1 e 2 a terra através de resistências de valor r^* e se injeta uma corrente i^* pelo contato 3?

Resposta: O sistema de base é

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{11}\,\mathbb{V}_1 + \mathbb{A}_{12}\,\mathbb{V}_2 + \mathbb{A}_{13}\,\mathbb{V}_3 &= \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{A}_{21}\,\mathbb{V}_1 + \mathbb{A}_{22}\,\mathbb{V}_2 + \mathbb{A}_{23}\,\mathbb{V}_3 &= \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{A}_{31}\,\mathbb{V}_1 + \mathbb{A}_{32}\,\mathbb{V}_2 + \mathbb{A}_{33}\,\mathbb{V}_3 &= \mathbb{I}_3 \end{aligned}$$

onde, pelas condições impostas, sabemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_1 &= -r^*\,\mathbb{I}_1 \\ \mathbb{V}_2 &= -r^*\,\mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_3 &= i^* \end{aligned}$$

Resolvendo essas 6 equações com 6 incógnitas determinamos todas as variáveis do sistema.
Pense porque quando um contato `i` é colocado a terra através de uma resistência `r` a modificação na matriz é

```
AAt=AA;
AAt(i,i)=AAt(i,i)+1/r;
```

o mesmo vale para um nó `n1` qualquer do circuito

```
At=A;
At(n1,n1)=At(n1,n1)+1/r;
```

Exercício: Quanto valem $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$ e $\mathbb{V}_3$ quando se coloca o contato 1 a terra através de uma resistência r^* **e se coloca uma fonte de tensão de valor v^* entre os contatos 2 e 3?**

Resposta: O sistema de base é

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{11}\,\mathbb{V}_1 + \mathbb{A}_{12}\,\mathbb{V}_2 + \mathbb{A}_{13}\,\mathbb{V}_3 &= \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{A}_{21}\,\mathbb{V}_1 + \mathbb{A}_{22}\,\mathbb{V}_2 + \mathbb{A}_{23}\,\mathbb{V}_3 &= \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{A}_{31}\,\mathbb{V}_1 + \mathbb{A}_{32}\,\mathbb{V}_2 + \mathbb{A}_{33}\,\mathbb{V}_3 &= \mathbb{I}_3 \end{aligned}$$

onde, pelas condições impostas, sabemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_1 &= -r^*\,\mathbb{I}_1 \\ \mathbb{V}_3 - \mathbb{V}_2 &= v^* \\ \mathbb{I}_3 &= -\mathbb{I}_2 \end{aligned}$$

Resolvendo essas 6 equações com 6 incógnitas determinamos todas as variáveis do sistema.
