SME0305 - 2014

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176
gustavo.buscaglia@gmail.com

Lista 13 (9 de junho de 2014)

Lembrete: O método das potências aplicado a uma matriz $\underline{\underline{B}}$ e partindo de um vetor $\underline{y}^{(0)}$ com $\|\underline{y}^{(0)}\| = 1$ consiste em fazer:

$$\underline{x}^{(k)} = \underline{\underline{B}}\, \underline{y}^{(k-1)} \qquad (1)$$

$$\underline{y}^{(k)} = \frac{1}{\|\underline{x}^{(k)}\|}\, \underline{x}^{(k)} \qquad (2)$$

$$\mu^{(k)} = (\underline{y}^{(k)})^T\, \underline{\underline{B}}\, \underline{y}^{(k)} \qquad (3)$$

volta a (1) (4)

Teorema: A sequência $\mu^{(k)}$ tende ao autovalor (suposto real e único) de maior valor absoluto da matriz $\underline{\underline{B}}$.

---

1. Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz $n \times n$ e seja $\underline{\underline{I}}$ a matriz identidade $n \times n$. Dizer se verdadeiro ou falso:
   (a) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$, então $\lambda + q$ é autovalor de $\underline{\underline{A}} + q\,\underline{\underline{I}}$, para todo $q \in \mathbb{R}$. **V**
   (b) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existe, então $1/\lambda$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}^{-1}$. **V**
   (c) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$, então λ^2 é autovalor de $\underline{\underline{A}}^2$. **V**
   (d) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$ e $q \in \mathbb{R}$ não, então $1/(\lambda - q)$ é autovalor de $(\underline{\underline{A}} - q\,\underline{\underline{I}})^{-1}$. **V**
   (e) Se $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, então $\underline{v}$ é também autovetor de $\underline{\underline{A}} + q\,\underline{\underline{I}}$, para todo $q \in \mathbb{R}$. **V**
   (f) Se $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$ (matriz com determinante não zero), então $\underline{w} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}^{-1}$. **V**
   (g) Se $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$ (matriz com determinante não zero), então $\underline{w} = \underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}^{-1}$. **V**
   (h) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$, então $\lambda + 2$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}^2$. **F**
   (i) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existe, então $-\lambda$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}^{-1}$. **F**
   (j) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$, então $-\lambda$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}^T$. **F**
   (k) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$ e $q \in \mathbb{R}$ não, então $(1/\lambda) - (1/q)$ é autovalor de $(\underline{\underline{A}} - q\,\underline{\underline{I}})^{-1}$. **F**
   (l) Se $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existe, então $\underline{v}$ é também autovetor de $\underline{\underline{A}}^{-1}$. **V**
   (m) Se $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$ (matriz não simétrica com determinante não zero), então $\underline{v}$ é também autovetor de $\underline{\underline{A}}^T$. **F**

2. Sejam $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ duas matrizes $n \times n$. Dizer se verdadeiro ou falso:
   (a) Se $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \underline{\underline{B}}\,\underline{v}$, para todo $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, então $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$. **V**
   (b) Para que $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \underline{\underline{B}}\,\underline{v}$ se cumpra para todo $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, é necessário que as matrizes $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ sejam iguais. **V**
   (c) Se $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ e $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{B}}$, então $\underline{\underline{A}}\,\underline{v}$ também é autovetor de $\underline{\underline{B}}$. **V**
   (d) Se $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ e $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, então $\underline{\underline{B}}\,\underline{v}$ também é autovetor de $\underline{\underline{A}}$. **V**
   (e) Se $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ e $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, então $\underline{\underline{B}}\,\underline{v}$ não é autovetor de $\underline{\underline{A}}$. **F**
   (f) Para que $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \underline{\underline{B}}\,\underline{v}$ se cumpra para todo $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, é suficiente que $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ tenham os mesmos autovalores. **F**
   (g) Se $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ tem inversa, então tanto $\underline{\underline{A}}$ como $\underline{\underline{B}}$ têm inversa. **V**
   (h) Se $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ tem inversa, então tanto $\underline{\underline{A}}$ como $\underline{\underline{B}}$ têm inversa. **F**
   (i) Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz $n \times n$ que tem n autovalores distintos, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, satisfazendo $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ sempre que $i \neq j$. Suponha os autovalores ordenados de maneira que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$. Os correspondentes autovetores são $\underline{v}^{(1)}$, $\underline{v}^{(2)}$, etc., são normalizados na norma euclidiana ($\|\underline{z}\| = \sqrt{\underline{z}^T \underline{z}}$).
   Dizer se verdadeiro ou falso:
      i. A matriz $\underline{\underline{A}}$ é diagonalizável. **V**
      ii. A matriz $\underline{\underline{A}} - \lambda_1\,\underline{\underline{I}}$ é diagonalizável. **V**
      iii. A matriz $\underline{\underline{A}} - \lambda_1\,\underline{\underline{I}}$ tem autovalores 0, $\lambda_2 - \lambda_1$, $\lambda_3 - \lambda_1$, …, $\lambda_n - \lambda_1$. **V**

3. Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz 4×4 cujos autovalores são 1, 2, 3 e 4. Então, começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} - 3\,\underline{\underline{I}}$, a sequência dos $\mu^{(k)}$ convergirá para:
   (a) 1
   (b) 3
   (c) -1
   (d) -2
   (e) $1/3$
   (f) $-1/2$
   (g) 0
   (h) Não convergirá

   A alternativa correta é a **(d)**.

4. Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz 4×4 cujos autovalores são 1, 2, 3 e 4. Então, começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{A}} + 2\,\underline{\underline{I}})^{-1}$, a sequência dos $\mu^{(k)}$ convergirá para:
   (a) 1
   (b) $1/2$
   (c) $-1/2$
   (d) $1/4$
   (e) $1/3$
   (f) $1/6$
   (g) $-1/5$
   (h) Não convergirá

   A alternativa correta é a **(e)**.

5. Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz $n \times n$ conhecida. Começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{A}} - 0.2\ \underline{\underline{I}})^{-1}$, a sequência dos $\mu^{(k)}$ converge para 5. Então é possível concluir que:
   (a) 5 é autovalor de $\underline{\underline{A}}$.
   (b) $1/5$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$.
   (c) $2/5$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$.
   (d) 0 é autovalor de $\underline{\underline{A}}$.
   (e) $\underline{\underline{A}}$ não tem autovalores positivos menores que $1/5$.
   (f) $\underline{\underline{A}}$ não tem autovalores positivos menores que $2/5$.
   (g) $\underline{\underline{A}}$ não tem autovalores positivos menores que $4/5$.

   Pode-se concluir que as afirmações **(c), (e)** e **(f)** são necessariamente verdadeiras.
6. Seja $\underline{\underline{A}}^{(0)}$ uma matriz $n \times n$ qualquer, cuja fatoração QR é
   $$\underline{\underline{A}}^{(0)} = \underline{\underline{Q}}^{(0)}\ \underline{\underline{R}}^{(0)}$$
   de acordo com o método iterativo de Rutishauser-Francis a próxima matriz é
   $$\underline{\underline{A}}^{(1)} = \underline{\underline{R}}^{(0)}\ \underline{\underline{Q}}^{(0)}$$
   Supondo que $(\lambda, \underline{v})$ seja um par autovalor-autovetor de $\underline{\underline{A}}^{(0)}$, dizer se verdadeiro ou falso (no caso geral, não para alguma matriz em particular):
   (a) λ é autovalor de $\underline{\underline{A}}^{(1)}$. **V**
   (b) λ é autovalor de $\underline{\underline{Q}}^{(0)}$. **F**
   (c) λ é autovalor de $\underline{\underline{R}}^{(0)}$. **F**
   (d) $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}^{(1)}$.
   (e) $\underline{\underline{Q}}^{(0)}\ \underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}^{(1)}$. **F**
   (f) $(\underline{\underline{Q}}^{(0)})^{-1}\ \underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}^{(1)}$. **V**
   (g) $(\underline{\underline{Q}}^{(0)})^{T}\ \underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}^{(1)}$. **V**
7. Dada uma matriz $\underline{\underline{A}}$ quadrada, o comando de octave
   `[S,D]=eig(A)`
   calcula matrizes $\underline{\underline{S}}$ (não singular) e $\underline{\underline{D}}$ (diagonal) tais que $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}\ \underline{\underline{D}}\ \underline{\underline{S}}^{-1}$.

   Dizer se verdadeiro ou falso:
   (a) As linhas de $\underline{\underline{S}}$ são autovetores de $\underline{\underline{A}}$. **F**
   (b) As colunas de $\underline{\underline{S}}$ são autovetores de $\underline{\underline{A}}$. **V**
   (c) As colunas de $\underline{\underline{S}}^{-1}$ são autovetores de $\underline{\underline{A}}$. **F**
   (d) Quando $\underline{\underline{A}}$ é simétrica, $\underline{\underline{S}}$ é ortogonal. **V**
   (e) Quando $\underline{\underline{A}}$ é simétrica, $\underline{\underline{S}}$ é simétrica. **F**
   (f) A matriz $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^{T}$ é simétrica. **V**
   (g) A matriz $\underline{\underline{A}}^{T}\ \underline{\underline{A}}$ é simétrica. **V**
   (h) Fazendo
   ```
   > [SS,DD]=eig(A+A')
   > BB = SS'*SS
   ```
   o resultado será uma matriz `BB` igual à matriz identidade (a menos do erro de arredondamento). **V**
   (i) Fazendo
   ```
   > [SS,DD]=eig(A*A')
   > BB = SS'*SS
   ```
   o resultado será uma matriz `BB` igual à matriz identidade (a menos do erro de arredondamento). **V**
   (j) Fazendo
   ```
   > [SS,DD]=eig(A'*A)
   > BB = SS'*SS
   ```
   o resultado será uma matriz `BB` igual à matriz identidade (a menos do erro de arredondamento). **V**

Boa prática!!