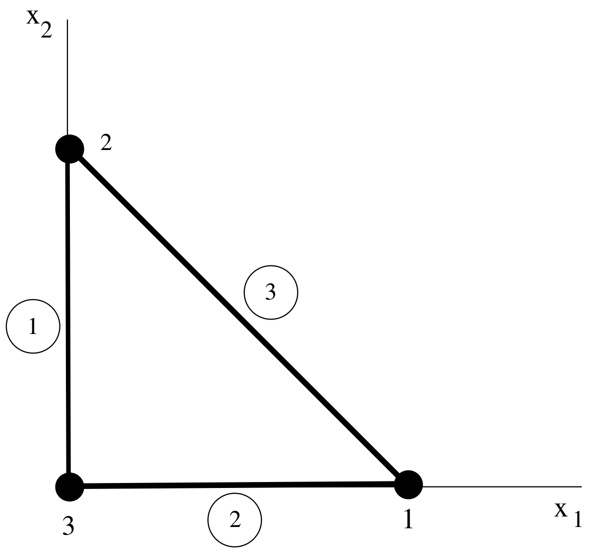
SME0305 - 2014

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176 - Sala 4-219
gustavo.buscaglia@gmail.com

Lista 11 (26 de maio de 2014)



Consideremos a treliça da figura, cuja conectividade e coordenadas estão dadas por

```
nb=3, nv=3;
conec=[2 3 ; 3 1 ; 1 2 ];
coord=[0.1 0 ; 0 0.1 ; 0 0 ];
```

formada por barras articuladas de $E = 2 \times 10^{11}$ Pa e seção transversal de 10^{-6} m^2.

```
modu=[2e5,2e5,2e5];
```

1. Calcule a matriz 4×4 de rigidez da barra 3.
   Resposta:

$$\underline{\underline{K}}^{(3)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 10^6 \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Seja a função

```
function Kglo = rigidez(nb,nv,conec,\
modu,coord)
%nb nro de barras, nv nro de nos,
%modu(1:nb) valor de EA
%coord coordenadas
Kglo=zeros(2*nv,2*nv);
for ib=1:nb
Kloc=zeros(4,4);
na=conec(ib,1); nb=conec(ib,2);
Xa=coord(na,:)';
Xb=coord(nb,:)';
d=Xb-Xa;
l0=norm(d);
kk=modu(ib)/(l0^3);
aux=d*d';
Kloc(1:2,1:2)=kk*aux;
Kloc(1:2,3:4)=-kk*aux;
Kloc(3:4,1:2)=-kk*aux;
Kloc(3:4,3:4)=kk*aux;
%Kloc agora contem a matriz de rigidez
% da barra
loc2glo=[2*na-1,2*na,2*nb-1,2*nb];
for j=1:4
for k=1:4
jglo=loc2glo(j);
kglo=loc2glo(k);
Kglo(jglo,kglo)=Kglo(jglo,kglo)+Kloc(j,k);
end
end
end
%%%
end
```

   Dizer quais das seguintes chamadas vão ter como resultado a matriz da barra 3, quais vão ter um resultado diferente, e quais darão erro (justificando):

   (a) `K3=rigidez(1,2,[1 2],[2e5],[0.1 0; 0 0.1])`
   (b) `K3=rigidez(2,1,[1 2],[2e5],[0.1 0; 0 0.1])`
   (c) `K3=rigidez(1,2,[1 2],[2e5],[0.2 0.1; 0.1 0.2])`
   (d) `K3=rigidez(1,2,[1 2],[2e5],[0 0.1; 0.1 0])`
   (e) `K3=rigidez(1,2,[1 2],[2e5],[0 0; 0.1 0.1])`

   Teste se suas respostas são corretas diretamente no Octave!

3. Para a matriz $\underline{\underline{K}}^{(3)}$ verificar que os três vetores seguintes são autovetores de autovalor zero:

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{t} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   explicar o porquê (ajuda: relacionar com os movimentos rígidos da barra).

4. Dar um argumento físico para que o vetor $\underline{v} = (0, 0, 1, 1)^T$ seja autovetor de $\underline{\underline{K}}^{(3)}$.

5. Verifique que a matriz da barra 1 é

$$\underline{\underline{K}}^{(1)} = 2 \times 10^6 \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Dizer quais das seguintes chamadas vão ter como resultado a matriz da barra 1, quais vão ter um resultado diferente, e quais darão erro (justificando):

   (a) `K1=rigidez(1,2,[1 2],[2e5],[0 0; 0 0.1])`
   (b) `K1=rigidez(1,2,[2 1],[2e5],[0 0; 0 0.1])`
   (c) `K1=rigidez(1,2,[1 2],[2e5],[2 0; 2 0.1])`
   (d) `K1=rigidez(1,2,[1 2],[2e5],[2 0.1; 2 0])`
   (e) `K1=rigidez(1,2,[2 1],[2e5],[0 0; 0.1 0])`

7. Construa três autovetores de autovalor zero para $\underline{\underline{K}}^{(1)}$, com a mesma ideia de $\underline{r}$, $\underline{s}$ e $\underline{t}$.

8. Dar um argumento físico para que os seguintes vetores sejam autovetores de autovalor zero de $\underline{\underline{K}}^{(1)}$:

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. Construir a matriz de rigidez global da treliça da figura.
Resposta:
$\underline{\underline{K}} = 2 \times 10^6 \times$

$$\times \begin{pmatrix} 1.353 & -0.353 & -0.353 & 0.353 & -1 & 0 \\ -0.353 & 0.353 & 0.353 & -0.353 & 0 & 0 \\ -0.353 & 0.353 & 0.353 & -0.353 & 0 & 0 \\ 0.353 & -0.353 & -0.353 & 1.353 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Verificar que o vetor $(0, 1, -1, 0, 0, 0)^T$ é autovetor de autovalor zero. Interpretar. Explicar porque esse autovetor corresponde a uma rotação rígida.

11. Construir outros dois autovetores, um de translação rígida e outro de rotação rígida (linearmente independentes do do item anterior e entre si).

12. Identificar quais códigos Octave geram a matriz $\underline{\underline{K}}$

    (a) `Kglo=rigidez(3,3,[2 3;3 1; 1 2],\`
    `[2e5,2e5,2e5],[0.1 0; 0 0.1; 0 0])`

    (b) `Kglo=rigidez(3,3,[2 3;3 1; 1 2],\`
    `[0.1 0; 0 0.1; 0 0],[2e5,2e5,2e5])`

    (c) `Kglo=rigidez(3,3,[3 2;1 3; 2 1],\`
    `[2e5,2e5,2e5],[0.1 0; 0 0.1; 0 0])`

13. Considere o caso em que os nós 2 e 3 estão *fixos* (deslocamento imposto zero) e se pendura um peso de 100 N do nó 1. Mostre que o sistema a ser resolvido para determinar os deslocamentos é

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{K}} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ R_1^2 \\ R_2^2 \\ R_1^3 \\ R_2^3 \end{pmatrix} \\ u_1^2 = u_2^2 = u_1^3 = u_2^3 = 0 \end{array} \right.$$

de 10 equações com 10 incógnitas, onde $\vec{R}^2$ e $\vec{R}^3$ são as reações (desconhecidas) nos apoios (nó 2 e nó 3, respectivamente).

14. Mostre que o sistema anterior é equivalente a

$$\underline{\underline{K}} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ R_1^2 \\ R_2^2 \\ R_1^3 \\ R_2^3 \end{pmatrix}$$

de 6 equações com 6 incógnitas.

15. Mostre ainda que o sistema do item anterior pode ser resolvido calculando primeiro u_1^1 e u_2^1 a partir de

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \end{pmatrix}$$

(notar que corresponde a eliminar da matriz as linhas e colunas das incógnitas que tem o valor imposto como zero). Isto pode ser realizado no Octave fazendo

```
u=zeros(6,1);
u(1:2,1)=Kglo(1:2,1:2)\[0;-100];
```

Uma vez resolvido o sistema, as reações podem ser obtidas fazendo

```
R2=Kglo(3:4,1:2)*u(1:2);
R3=Kglo(5:6,1:2)*u(1:2);
```

Resolva dessa maneira e compare com uma resolução manual do mesmo problema.

Boa prática!!