SME0305 - 2014

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176 - Sala 4-219
gustavo.buscaglia@gmail.com

Lista 10 (16 de maio de 2014)

Nessa prática começamos a revisão dos conceitos fundamentais do tratamento numérico de sistemas lineares.

---

1. Consideramos sistemas lineares de n equações com n incógnitas. Diga se verdadeiro ou falso:

   (a) Se o determinante de um sistema é zero, a matriz do sistema tem um autovetor com autovalor zero.

   (b) Se o determinante de um sistema é zero, a primeira das colunas da matriz é combinação linear das $n-1$ restantes.

   (c) Se $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$, e $\underline{\underline{B}}$ é uma matriz obtida a partir de permutações das linhas de $\underline{\underline{A}}$, então $\underline{\underline{B}}\ \underline{x} = \underline{b}$.

   (d) Se $\underline{\underline{A}}$ é uma matriz triangular superior com todos os elementos da diagonal não nulos, então o sistema $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ pode ser resolvido em aproximadamente n^2 operações.

   (e) Se $\underline{\underline{A}}$ é uma matriz triangular inferior com todos os elementos da diagonal não nulos, então o sistema $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ pode ser resolvido em aproximadamente n^3 operações.

   (f) Na eliminação de Gauss, para que a solução não seja muito sensível ao erro de arredondamento, aplica-se o pivotamento parcial.

   (g) O pivotamento parcial na eliminação de Gauss corresponde a permutar colunas da matriz e por tanto não muda a solução do sistema.

   (h) O objetivo da decomposição LU é achar, para uma dada matriz $\underline{\underline{A}}$, uma matriz triangular inferior $\underline{\underline{L}}$ com 1's na diagonal, e uma matriz triangular superior $\underline{\underline{U}}$, tais que $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{U}}$.

   (i) Se obter os fatores LU de uma matriz geral de 100×100 demora 1 segundo, então para uma matriz de 1000×1000 a demora será de aproximadamente 100 segundos.

   (j) Se obter os fatores LU de uma matriz tridiagonal de 100×100 demora 1 segundo, então para uma matriz de 1000×1000 a demora será de aproximadamente 100 segundos.

   (k) A maneira mais eficiente de resolver o sistema $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ quando $\underline{\underline{A}}$ é ortogonal é a fatoração LU.

   (l) Se, durante a fatoração LU, aparece um pivô zero, então a matriz que está sendo fatorada é singular.

   (m) A eliminação de Gauss é mais conveniente que a fatoração LU quando a mesma matriz será resolvida para vários lados direitos $\underline{b}$.

2. Resolvendo $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ por eliminação de Gauss sem pivotamento obteve-se um vetor solução $\underline{y}$. Se suspeita que por erro de arredondamento o vetor $\underline{y}$ obtido não é suficientemente preciso e deseja-se refinar a solução. Então uma solução mais refinada será o vetor $\underline{y} + \underline{z}$, onde $\underline{z}$ é obtido resolvendo (novamente por eliminação de Gauss sem pivotamento) qual sistema?

   (a) $\underline{\underline{A}}\ \underline{z} = \underline{b} - \underline{\underline{A}}\ \underline{y}$.

   (b) $\underline{\underline{A}}\ \underline{z} = \underline{b}$.

   (c) $\underline{\underline{A}}\ \underline{z} = \underline{b} + \underline{\underline{A}}\ \underline{y}$.

   (d) Não é possível reduzir o erro com essa estratégia.

3. Considere o método do gradiente: Dados $\underline{\underline{A}}$ (matriz simétrica definida positiva), $\underline{b}$ e $\underline{x}^{(0)}$, fazer para $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$
\begin{aligned}
\underline{r}^{(k)} &= \underline{b} - \underline{\underline{A}}\,\underline{x}^{(k)} \\
\underline{d}^{(k)} &= \underline{r}^{(k)} \\
\alpha_k &= \frac{(\underline{d}^{(k)})^T \underline{r}^{(k)}}{\underline{d}^{(k)})^T\ \underline{\underline{A}}\,\underline{d}^{(k)}} \\
\underline{x}^{(k+1)} &= \underline{x}^{(k)} + \alpha_k\,\underline{d}^{(k)} \\
k++ & \quad \text{e voltar}
\end{aligned}
$$

   e seja $\underline{x}^*$ a solução de $\underline{\underline{A}}\,\underline{x}^* = \underline{b}$. Dizer se as seguintes afirmações são verdadeiras (V) ou falsas (F).

   (a) Se $\underline{x}^{(0)}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, o método converge em 1 (uma) iteração.

   (b) Se $\underline{x}^*$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, o método converge em 1 (uma) iteração.

   (c) Se $\underline{b}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, o método converge em 1 (uma) iteração.

   (d) Se $\underline{x}^* - \underline{x}^{(0)}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, o método converge em 1 (uma) iteração.

   (e) Se $\underline{\underline{A}}$ é um múltiplo da identidade, o método converge em 1 (uma) iteração.

   (f) O valor de α_k é tal que $\underline{x}^{(k+1)}$ é o mínimo de
   $$F(\underline{x}) = \frac{1}{2}\underline{x}^T\ \underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{x}^T\,\underline{b}$$
   ao longo da reta $\underline{x}^{(k)} + \alpha\,\underline{d}^{(k)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (g) O valor de α_k é tal que, no ponto $\underline{x}^{(k+1)}$, o resíduo $\underline{b} - \underline{\underline{A}x}^{(k+1)}$ é ortogonal a $\underline{d}^{(k)}$.

   (h) O valor de α_k é tal que, no ponto $\underline{x}^{(k+1)}$, o resíduo $\underline{b} - \underline{\underline{A}x}^{(k+1)}$ é ortogonal a $\underline{r}^{(k)}$.

   (i) O método do gradiente é equivalente ao algoritmo geral, com $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}}$ (a identidade) e uma escolha especial de α_k.

   (j) O método do gradiente escrito acima é equivalente ao escrito na louça da aula de 16 de maio.

4. Responda se verdadeiro (V) ou falso (F):

   (a) Para um sistema linear simétrico e definido positivo, o método do gradiente e o método dos gradientes conjugados são equivalentes.

   (b) Para um sistema linear $n \times n$ simétrico e definido positivo, o método dos gradientes conjugados converge em no máximo n iterações (com aritmética exata).

   (c) Para um sistema linear $n \times n$ simétrico e definido positivo, com n grande, o método dos gradientes conjugados é mais favorável que o método do gradiente.

   (d) Para um sistema linear $n \times n$ simétrico e definido positivo, o ponto $\underline{x}^{(k+1)}$ do método do gradiente minimiza a função

   $$F(\underline{x}) = \frac{1}{2}\underline{x}^T \,\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{x}^T\,\underline{b}$$

   sobre todos os $\underline{x}$ da forma

   $$\underline{x}^{(0)} + a_0\underline{d}^{(0)} + a_1\underline{d}^{(1)} + \ldots + a_k\underline{d}^{(k)}$$

   (e) O item anterior é falso, mas é verdadeiro quando referido ao método dos gradientes conjugados.

   (f) O método dos gradientes conjugados é uma variação do método do gradiente, no qual a direção $\underline{d}^{(k)}$, em vez de ser igual a $\underline{r}^{(k)}$, é dada por

   $$\underline{d}^{(k)} = \underline{r}^{(k)} - \beta_k\,\underline{d}^{(k-1)}$$

   com β_k escolhido para que as direções $\underline{d}^{(k-1)}$ e $\underline{d}^{(k)}$ sejam A-conjugadas.

   (g) Duas direções $\underline{d}$ e $\underline{\widetilde{d}}$ se dizem A-conjugadas se $\underline{d}^T\,\underline{\widetilde{d}} = 0$.

   (h) Duas direções $\underline{d}$ e $\underline{\widetilde{d}}$ se dizem A-conjugadas se $\underline{d}^T\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\widetilde{d}} = 0$.

Boa prática!!