SME0301 - 2013

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176
gustavo.buscaglia@gmail.com

Prova Substitutiva (27 de junho de 2013)

Lembrete: O método das potências aplicado a uma matriz $\underline{\underline{B}}$ e partindo de um vetor $\underline{x}^{(0)}$ com $\|\underline{x}^{(0)}\| = 1$ consiste em fazer:

$$\underline{y}^{(k+1)} = \underline{\underline{B}}\, \underline{x}^{(k)} \quad (1)$$

$$\mu^{(k+1)} = \text{sgn}\{(\underline{y}^{(k+1)})^T \underline{x}^{(k)}\}\ \|\underline{y}^{(k+1)}\| \quad (2)$$

$$\underline{x}^{(k+1)} = \frac{1}{\mu^{(k+1)}}\ \underline{y}^{(k+1)} \quad (3)$$

$$\text{volta a (1)} \quad (4)$$

Lembrete: Dizemos que dois vetores $\underline{v}$ e $\underline{w}$ são ortogonais se $\underline{v}^T\ \underline{w} = 0$, e que são A-conjugados se $\underline{v}^T\ \underline{\underline{A}}\, \underline{w} = 0$.

---

1. (2 pontos) Consideramos sistemas lineares de n equações com n incógnitas. Diga se verdadeiro ou falso:

   (a) O determinante de um sistema singular é sempre negativo.

   (b) Se o determinante de um sistema é zero, a matriz do sistema tem um autovetor com autovalor zero.

   (c) Se o determinante de um sistema é zero, a primeira das colunas da matriz é combinação linear das $n-1$ restantes.

   (d) Se $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$, e $\underline{\underline{B}}$ é uma matriz obtida a partir de permutações das linhas de $\underline{\underline{A}}$, então $\underline{\underline{B}}\ \underline{x} = \underline{b}$.

   (e) Se $\underline{\underline{A}}$ é uma matriz triangular superior com todos os elementos da diagonal não nulos, então o sistema $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ pode ser resolvido em aproximadamente n^2 operações.

   (f) Se $\underline{\underline{A}}$ é uma matriz triangular inferior com todos os elementos da diagonal não nulos, então o sistema $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ pode ser resolvido em aproximadamente n^3 operações.

   (g) Na eliminação de Gauss, para que a solução não seja muito sensível ao erro de arredondamento, aplica-se o pivotamento parcial.

   (h) O pivotamento parcial na eliminação de Gauss corresponde a permutar colunas da matriz e por tanto não muda a solução do sistema.

   (i) O objetivo da decomposição LU é achar, para uma dada matriz $\underline{\underline{A}}$, uma matriz triangular inferior $\underline{\underline{L}}$ com 1's na diagonal, e uma matriz triangular superior $\underline{\underline{U}}$, tais que $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{U}}$.

   (j) Se obter os fatores LU de uma matriz de 100×100 demora 1 segundo, então para uma matriz de 1000×1000 a demora será de aproximadamente 100 segundos.

   (k) Se, durante a fatoração LU, aparece um pivô zero, então a matriz que está sendo fatorada é singular.

   (l) A eliminação de Gauss é mais conveniente que a fatoração LU quando a mesma matriz será resolvida para vários lados direitos $\underline{b}$.

2. (1 ponto) Resolvendo $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ por eliminação de Gauss sem pivotamento obteve-se um vetor solução $\underline{y}$. Se suspeita que por erro de arredondamento o vetor $\underline{y}$ obtido não é suficientemente preciso e deseja-se refinar a solução. Então uma solução mais refinada será o vetor $\underline{y}+\underline{z}$, onde $\underline{z}$ é obtido resolvendo (novamente por eliminação de Gauss sem pivotamento) qual sistema?

   (a) $\underline{\underline{A}}\ \underline{z} = \underline{b} - \underline{\underline{A}}\ \underline{y}$.

   (b) $\underline{\underline{A}}\ \underline{z} = \underline{b}$.

   (c) $\underline{\underline{A}}\ \underline{z} = \underline{b} + \underline{\underline{A}}\ \underline{y}$.

   (d) Não é possível reduzir o erro com essa estratégia.

3. (1,5 ponto) Seja a função

$$\underline{f}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + x_1 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_1\, x_2^2 \\ 3 + 2\, x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 - x_2\, x_1^2 \end{pmatrix}$$

   qual o resultado de fazer uma iteração de Newton-Raphson com condição inicial

$$\underline{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad ?$$

   (a) $(2.044, -1.940)^T$

   (b) $(0.357, -2.214)^T$

   (c) $(0.678, -1.857)^T$

   (d) $(0.804, -2.108)^T$

   (e) $(1.175, -1.596)^T$

   (f) $(2.173, -1.847)^T$

   (g) $(0.800, -1.550)^T$

   (h) $(0.897, -1.529)^T$

   (i) $(0.962, -1.819)^T$

   (j) $(1.375, -1.422)^T$

   (k) Não é possível aplicar o método.

   (l) Nenhuma das anteriores. O resultado é:

4. (1,5 ponto) Sejam $\underline{r}$ e $\underline{z}$ vetores (coluna) em $\mathbb{R}^n$, seja $\beta \in \mathbb{R}$, seja

$$\underline{d} = -\underline{r} + \beta\, \underline{z}$$

   e $\underline{\underline{A}}$ uma matriz $n \times n$ simétrica definida positiva. Responder por verdadeiro (V) ou falso (F) as seguintes afirmações:

   (a) Para que $\underline{d}$ e $\underline{z}$ sejam ortogonais, é suficiente que

$$\beta = \frac{\underline{r}^T \underline{z}}{\underline{z}^T \underline{z}}$$

   (b) Para que $\underline{d}$ e $\underline{z}$ sejam ortogonais, é suficiente que

$$\beta = \frac{\underline{z}^T \underline{r}}{\underline{z}^T \underline{z}}$$

   (c) Para que $\underline{d}$ e $\underline{z}$ sejam ortogonais, é suficiente que

$$\beta = -\frac{\underline{z}^T \underline{r}}{\underline{z}^T \underline{z}}$$

(d) Para que $\underline{d}$ e $\underline{z}$ sejam ortogonais, é suficiente que

$$\beta = \frac{\underline{z}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{r}}{\underline{z}^T \underline{z}}$$

(e) Para que $\underline{d}$ e $\underline{z}$ sejam A-conjugados, é suficiente que

$$\beta = \frac{\underline{r}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{z}}{\underline{z}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{z}}$$

(f) Para que $\underline{d}$ e $\underline{z}$ sejam A-conjugados, é suficiente que

$$\beta = \frac{\underline{z}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{r}}{\underline{z}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{z}}$$

(g) Para que $\underline{d}$ e $\underline{z}$ sejam A-conjugados, é suficiente que

$$\beta = \underline{0}$$

5. (2 pontos) Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz $n \times n$ que tem n autovalores distintos, λ_1, ..., λ_n, satisfazendo $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ sempre que $i \neq j$. Suponha os autovalores ordenados de maneira que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$. Os correspondentes autovetores são $\underline{v}^{(1)}$, $\underline{v}^{(2)}$, etc., são normalizados na norma euclidiana ($\|\underline{z}\| = \sqrt{\underline{z}^T \underline{z}}$).
Dizer se verdadeiro ou falso:

   (a) A matriz $\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}}$ é diagonalizável.
   (b) A matriz $\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}}$ é inversível (admite inversa).
   (c) A matriz $\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{v}^{(1)} [\underline{v}^{(1)}]^T$ é diagonalizável.
   (d) A matriz $\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{v}^{(1)} [\underline{v}^{(1)}]^T$ é inversível (admite inversa).
   (e) A matriz $\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}}$ tem autovalores 0, $\lambda_2 - \lambda_1$, $\lambda_3 - \lambda_1$, ..., $\lambda_n - \lambda_1$.
   (f) A matriz $\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}}$ tem autovalores 0, λ_2, λ_3, ..., λ_n.
   (g) A matriz $\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{v}^{(1)} [\underline{v}^{(1)}]^T$ tem autovalores 0, $\lambda_2 - \lambda_1$, $\lambda_3 - \lambda_1$, ..., $\lambda_n - \lambda_1$.
   (h) A matriz $\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{v}^{(1)} [\underline{v}^{(1)}]^T$ tem autovalores 0, λ_2, λ_3, ..., λ_n.

6. (2 pontos) Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz 4×4 cujos autovalores são 1, 2, 3 e 4. Então, começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{A}} + 2\, \underline{\underline{I}})^{-1}$, a sequência dos $\mu^{(k)}$ convergirá para:

   (a) 1
   (b) 1/2
   (c) −1/2
   (d) 1/4
   (e) 1/3
   (f) 1/6
   (g) −1/5
   (h) Não convergirá