SME0301 - 2013

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176
gustavo.buscaglia@gmail.com

Lista/Prova 8 (6 de junho de 2013)

1. Sejam $\underline{r}$ e $\underline{z}$ vetores (coluna) em $\mathbb{R}^n$, seja $\beta \in \mathbb{R}$, seja

$$\underline{d} = -\underline{r} + \beta\,\underline{z}$$

e $\underline{\underline{A}}$ uma matriz $n \times n$ simétrica definida positiva. Lembrando que dizemos que dois vetores $\underline{v}$ e $\underline{w}$ são ortogonais se $\underline{v}^T\,\underline{w} = 0$, e que são A-conjugados se $\underline{v}^T\,\underline{\underline{A}}\,\underline{w} = 0$, responder por verdadeiro (V) ou falso (F) as seguintes afirmações:

(a) Para que $\underline{d}$ e $\underline{r}$ sejam ortogonais, é necessário que ou β ou $\underline{z}$ sejam zero. F

(b) Para que $\underline{d}$ e $\underline{r}$ sejam ortogonais, é necessário que $\underline{z}$ não seja ortogonal a $\underline{r}$. V

(c) Para que $\underline{d}$ e $\underline{r}$ sejam ortogonais, é necessário que $\underline{z}$ seja ortogonal a $\underline{r}$. F

(d) Para que $\underline{d}$ e $\underline{z}$ sejam ortogonais, é suficiente que

$$\beta = \frac{\underline{r}^T\underline{z}}{\underline{z}^T\underline{z}}$$

V

(e) Para que $\underline{d}$ e $\underline{z}$ sejam ortogonais, é suficiente que

$$\beta = \frac{\underline{z}^T\underline{r}}{\underline{z}^T\underline{z}}$$

V

(f) Para que $\underline{d}$ e $\underline{z}$ sejam ortogonais, é suficiente que

$$\beta = -\frac{\underline{z}^T\underline{r}}{\underline{z}^T\underline{z}}$$

F

(g) Para que $\underline{d}$ e $\underline{z}$ sejam ortogonais, é suficiente que

$$\beta = \frac{\underline{z}^T\,\underline{\underline{A}}\,\underline{r}}{\underline{z}^T\underline{z}}$$

F

(h) Para que $\underline{d}$ e $\underline{z}$ sejam A-conjugados, é suficiente que

$$\beta = \frac{\underline{r}^T\,\underline{\underline{A}}\,\underline{z}}{\underline{z}^T\,\underline{\underline{A}}\,\underline{z}}$$

V

(i) Para que $\underline{d}$ e $\underline{z}$ sejam A-conjugados, é suficiente que

$$\beta = \frac{\underline{z}^T\,\underline{\underline{A}}\,\underline{r}}{\underline{z}^T\,\underline{\underline{A}}\,\underline{z}}$$

V

(j) Para que $\underline{d}$ e $\underline{z}$ sejam A-conjugados, é suficiente que

$$\beta = \frac{\underline{z}^T\,\underline{\underline{A}}\,\underline{r}}{\underline{r}^T\,\underline{\underline{A}}\,\underline{r}}$$

F

(k) Para que $\underline{d}$ e $\underline{z}$ sejam A-conjugados, é suficiente que

$$\beta = \underline{0}$$

F

(l) Se $\underline{z}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{d}$ e $\underline{z}$ são A-conjugados, então $\underline{d}$ e $\underline{z}$ são ortogonais. V

(m) Se $\underline{d}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{d}$ e $\underline{z}$ são A-conjugados, então $\underline{d}$ e $\underline{z}$ são ortogonais. V

(n) Se $\underline{d}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{d}$ e $\underline{z}$ são ortogonais, então $\underline{d}$ e $\underline{z}$ são A-conjugados. V

(o) Se $\underline{d}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{d}$ e $\underline{z}$ são A-conjugados, então $\underline{d}$ e $\underline{z}$ são colineares (um múltiplo do outro). F

2. Considere o método dos gradientes: Dados $\underline{\underline{A}}$, $\underline{b}$ e $\underline{x}^{(0)}$, fazer para $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned}
\underline{r}^{(k)} &= \underline{\underline{A}}\,\underline{x}^{(k)} - \underline{b} \\
\underline{d}^{(k)} &= -\underline{r}^{(k)} \\
\alpha_k &= \frac{(\underline{r}^{(k)})^T\underline{r}^{(k)}}{\underline{r}^{(k)})^T\,\underline{\underline{A}}\,\underline{r}^{(k)}} \\
\underline{x}^{(k+1)} &= \underline{x}^{(k)} + \alpha_k\,\underline{d}^{(k)} \\
k{+}{+} & \quad \text{e voltar}
\end{aligned}$$

e seja $\underline{x}^*$ a solução de $\underline{\underline{A}}\,\underline{x}^* = \underline{b}$. Dizer se as seguintes afirmações são verdadeiras (V) ou falsas (F).

(a) Se $\underline{x}^{(0)}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, o método converge em 1 (uma) iteração. F

(b) Se $\underline{x}^*$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, o método converge em 1 (uma) iteração. F

(c) Se $\underline{b}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, o método converge em 1 (uma) iteração. F

(d) Se $\underline{x}^* - \underline{x}^{(0)}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, o método converge em 1 (uma) iteração. V

(e) Se $\underline{\underline{A}}$ é um múltiplo da identidade, o método converge em 1 (uma) iteração. V

(f) Se $\underline{\underline{A}}$ é diagonalizável, o método converge em 1 (uma) iteração. F

(g) Se $\underline{\underline{A}}$ é definida positiva, o método converge em 1 (uma) iteração. F

(h) Se $\underline{\underline{A}}$ é ortogonal, o método converge em 1 (uma) iteração. F

3. Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz $n \times n$ e seja $\underline{\underline{I}}$ a matriz identidade $n \times n$. Dizer se verdadeiro ou falso:

(a) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$, então $\lambda + q$ é autovalor de $\underline{\underline{A}} + q\,\underline{\underline{I}}$, para todo $q \in \mathbb{R}$. V

(b) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existe, então $1/\lambda$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}^{-1}$. V

(c) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$, então λ^2 é autovalor de $\underline{\underline{A}}^2$. V

(d) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$ e $q \in \mathbb{R}$ não, então $1/(\lambda - q)$ é autovalor de $(\underline{\underline{A}} - q\,\underline{\underline{I}})^{-1}$. V

(e) Se $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, então $\underline{v}$ é também autovetor de $\underline{\underline{A}} + q\,\underline{\underline{I}}$, para todo $q \in \mathbb{R}$. V

(f) Se $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$ (matriz com determinante não zero), então $\underline{w} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}^{-1}$. V

(g) Se $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$ (matriz com determinante não zero), então $\underline{w} = \underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}^{-1}$. V

(h) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$, então $\lambda + 2$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}^2$. F

(i) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existe, então $-\lambda$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}^{-1}$. F

(j) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$, então $-\lambda$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}^T$. F

(k) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$ e $q \in \mathbb{R}$ não, então $(1/\lambda) - (1/q)$ é autovalor de $(\underline{\underline{A}} - q\,\underline{\underline{I}})^{-1}$. F

(l) Se $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existe, então $\underline{v}$ é também autovetor de $\underline{\underline{A}}^{-1}$. V

(m) Se $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$ (matriz não simétrica com determinante não zero), então $\underline{v}$ é também autovetor de $\underline{\underline{A}}^T$. F

4. Sejam $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ duas matrizes $n \times n$. Dizer se verdadeiro ou falso:

(a) Se $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \underline{\underline{B}}\,\underline{v}$, para todo $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, então $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$. V

(b) Para que $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \underline{\underline{B}}\,\underline{v}$ se cumpra para todo $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, é necessário que as matrizes $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ sejam iguais. V

(c) Se $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ e $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{B}}$, então $\underline{\underline{A}}\,\underline{v}$ também é autovetor de $\underline{\underline{B}}$. V

(d) Se $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ e $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, então $\underline{\underline{B}}\,\underline{v}$ também é autovetor de $\underline{\underline{A}}$. V

(e) Se $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ e $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, então $\underline{\underline{B}}\,\underline{v}$ não é autovetor de $\underline{\underline{A}}$. F

(f) Para que $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \underline{\underline{B}}\,\underline{v}$ se cumpra para todo $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, é suficiente que $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ tenham os mesmos autovalores. F

(g) Se $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ tem inversa, então tanto $\underline{\underline{A}}$ como $\underline{\underline{B}}$ têm inversa. V

(h) Se $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ tem inversa, então tanto $\underline{\underline{A}}$ como $\underline{\underline{B}}$ têm inversa. F