SME0301 - 2-13

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176
gustavo.buscaglia@gmail.com

Lista/Prova 4

Consideramos sistemas lineares de n equações com n incógnitas. No que sigue, as letras maiúsculas denotam matrizes $n \times n$ e as minúsculas vetores em $\mathbb{R}^n$ considerados como matrizes coluna. Diga se verdadeiro ou falso:

1. O determinante de um sistema singular é sempre positivo.
2. O determinante de um sistema singular não é nunca positivo.
3. O determinante de um sistema singular é sempre negativo.
4. O determinante de um sistema singular é zero.
5. Se o determinante de um sistema é zero, a matriz do sistema tem um autovetor com autovalor zero.
6. Se o determinante de um sistema é zero, a primeira das colunas da matriz é combinação linear das $n-1$ restantes.
7. Se o determinante de um sistema é zero, alguma das colunas da matriz é combinação linear das $n-1$ restantes.
8. Se o determinante de um sistema é zero, qualquer permutação de linhas e colunas da matriz também terá determinante zero.
9. Se $Ax = b$, e B é uma matriz obtida a partir de permutações das linhas de A, então $Bx = b$.
10. Se $Ax = b$, e B é uma matriz obtida a partir de permutações das colunas de A, então $Bx = b$.
11. Se A é uma matriz triangular superior com todos os elementos da diagonal não nulos, então o sistema $Ax = b$ pode ser resolvido em aproximadamente n^2 operações.
12. Se A é uma matriz triangular superior com todos os elementos da diagonal nulos, então o sistema $Ax = b$ pode ser resolvido em aproximadamente n^2 operações.
13. Se A é uma matriz triangular superior com todos os elementos da diagonal não nulos, então o sistema $Ax = b$ pode ser resolvido em aproximadamente n^3 operações.
14. Se A é uma matriz triangular inferior com todos os elementos da diagonal não nulos, então o sistema $Ax = b$ pode ser resolvido em aproximadamente n^2 operações.
15. Se A é uma matriz triangular inferior com todos os elementos da diagonal nulos, então o sistema $Ax = b$ pode ser resolvido em aproximadamente n^2 operações.
16. Se A é uma matriz triangular inferior com todos os elementos da diagonal não nulos, então o sistema $Ax = b$ pode ser resolvido em aproximadamente n^3 operações.
17. Na eliminação de Gauss, para que a solução não seja muito sensível ao erro de arredondamento, aplica-se o pivotamento parcial.
18. O pivotamento parcial na eliminação de Gauss corresponde a permutar linhas da matriz e por tanto não muda a solução do sistema.
19. O pivotamento parcial na eliminação de Gauss corresponde a permutar colunas da matriz e por tanto não muda a solução do sistema.
20. Resolvendo $Ax = b$ por eliminação de Gauss sem pivotamento obteve-se um vetor solução y. Se suspeita que por erro de arredondamento o vetor y obtido não é suficientemente preciso e deseja-se refinar a solução. Então uma solução mais refinada será o vetor $y + z$, onde z é obtido resolvendo (novamente por eliminação de Gauss sem pivotamento)
$$Az = b - Ay$$
21. Resolvendo $Ax = b$ por eliminação de Gauss sem pivotamento obteve-se um vetor solução y. Se suspeita que por erro de arredondamento o vetor y obtido não é suficientemente preciso e deseja-se refinar a solução. Então uma solução mais refinada será o vetor $y + z$, onde z é obtido resolvendo (novamente por eliminação de Gauss sem pivotamento)
$$Az = b + Ay$$
22. Resolvendo $Ax = b$ por eliminação de Gauss sem pivotamento obteve-se um vetor solução y. Se suspeita que por erro de arredondamento o vetor y obtido não é suficientemente preciso e deseja-se refinar a solução. Então uma solução mais refinada será o vetor $y + z$, onde z é obtido resolvendo (novamente por eliminação de Gauss sem pivotamento)
$$Az = b$$
23. O objetivo da decomposição LU é achar, para uma dada matriz A, uma matriz triangular inferior L com 1's na diagonal, e uma matriz triangular superior U, tais que $A = LU$.
24. O objetivo da decomposição LU é achar, para uma dada matriz A, uma matriz triangular inferior L com 1's na diagonal, e uma matriz triangular superior U, tais que $A = L + U$.
25. O custo da da decomposição LU é aproximadamente de $n^3/3$ operações de multiplicação/divisão.
26. O custo da da decomposição LU é aproximadamente de $n^2/3$ operações de multiplicação/divisão.
27. Se obter os fatores LU de uma matriz de 100×100 demora 1 segundo, então para uma matriz de 1000×1000 a demora será de aproximadamente 1000 segundos.
28. Se obter os fatores LU de uma matriz de 100×100 demora 1 segundo, então para uma matriz de 1000×1000 a demora será de aproximadamente 100 segundos.
29. Se obter os fatores LU de uma matriz de 100×100 demora 1 segundo, então para uma matriz de 1000×1000 a demora será de aproximadamente 10 segundos.
30. Se L é uma matriz triangular inferior com todos 1's na diagonal, então $\det(L) = 1$.
31. Se L é uma matriz triangular inferior com todos 1's na diagonal, então $\det(L) = 0$.
32. Se L é U correspondem à fatoração LU de A ($A = LU$), então $\det(A) = U_{11}U_{22}\dots U_{nn}$, isto é, o produto dos elementos diagonais de U.

33. Se L é U correspondem à fatoração LU de A ($A = LU$), então $\det(A) = U_{11} + U_{22} + \ldots + U_{nn}$, isto é, a soma dos elementos diagonais de U.

34. Seja x solução de $Ax = b$ quando b tem todos seus elementos zeros com exceção do i-ésimo, que vale 1. Então x é a coluna número i de A^{-1}.

35. Seja x solução de $Ax = b$ quando b tem todos seus elementos zeros com exceção do i-ésimo, que vale 1. Então x é a linha número i de A^{-1}.

36. Seja x solução de $Ax = b$ quando b tem todos seus elementos iguais a 1 com exceção do i-ésimo, que vale 0. Então x é a coluna número i de A^{-1}.

37. Se, durante a fatoração LU, aparece um pivô zero, então a matriz que está sendo fatorada é singular.

38. A fatoração LU é mais conveniente que a eliminação de Gauss quando a mesma matriz será resolvida para vários lados direitos b.

39. A eliminação de Gauss é mais conveniente que a fatoração LU quando a mesma matriz será resolvida para vários lados direitos b.

40. Uma matriz mal condicionada é uma matriz tal que o vetor solução de $Ax = b$ varia bastante quando os coeficientes da matriz A são variados levemente.

41. Toda matriz não singular A admite uma decomposição de Cholesky $A = L\,L^T$, onde L é triangular inferior.

42. Uma matriz A que não é simétrica não admite uma decomposição de Cholesky $A = L\,L^T$, onde L é triangular inferior.

43. Toda matriz A simétrica e com autovalores positivos pode ser decomposta como $A = L\,L^T$, onde L é triangular inferior.

44. Considere o algoritmo que, dado x_k, constroi x_{k+1} como
$$Dx_{k+1} = -Bx_k - Tx_k + b$$
onde $A = B{+}D{+}T$ com B triangular inferior estricta (diagonal zero), D diagonal e T triangular superior estricta (diagonal zero). Então, se o algoritmo converge para x^* (i.e., $x_k \to_{k\to\infty} x^*$) então x^* é solução de $Ax = b$.

45. Considere o algoritmo que, dado x_k, constroi x_{k+1} como
$$(D + T)x_{k+1} = -Bx_k + b$$
onde $A = B{+}D{+}T$ com B triangular inferior estricta (diagonal zero), D diagonal e T triangular superior estricta (diagonal zero). Então, se o algoritmo converge para x^* (i.e., $x_k \to_{k\to\infty} x^*$) então x^* é solução de $Ax = b$.

46. Considere o algoritmo que, dado x_k, constroi x_{k+1} como
$$Dx_{k+1} = -Bx_k - Tx_k + b$$
onde $A = B{+}D{+}T$ com B triangular inferior estricta (diagonal zero), D diagonal e T triangular superior estricta (diagonal zero). Seja x^* a solução de $Ax = b$. Então
$$x_{k+1} - x^* = S\,(x_k - x^*)$$
com $S = -D^{-1}(B{+}T)$. Se $\|S\| < 1$ o algoritmo converge.

47. Considere o algoritmo que, dado x_k, constroi x_{k+1} como
$$Dx_{k+1} = -Bx_k - Tx_k + b$$
onde $A = B{+}D{+}T$ com B triangular inferior estricta (diagonal zero), D diagonal e T triangular superior estricta (diagonal zero). Seja x^* a solução de $Ax = b$. Então
$$x_{k+1} - x^* = S\,(x_k - x^*)$$
com $S = -(B{+}T)^{-1}D$. Se $\|S\| < 1$ o algoritmo converge.

48. Considere o algoritmo de Gauss-Seidel, que, dado x_k, constroi x_{k+1} como
$$(B + D)x_{k+1} = -Tx_k + b$$
onde $A = B + D + T$ com B triangular inferior estricta (diagonal zero), D diagonal e T triangular superior estricta (diagonal zero). Então o mesmo algoritmo pode ser escrito como
$$x_{k+1} = x_k{+}z_k \qquad \text{onde } z_k \text{ é solução de} \qquad (B{+}D)z_k = b{-}Ax_k$$

49. Considere o algoritmo de Gauss-Seidel, que, dado x_k, constroi x_{k+1} como
$$(B + D)x_{k+1} = -Tx_k + b$$
onde $A = B + D + T$ com B triangular inferior estricta (diagonal zero), D diagonal e T triangular superior estricta (diagonal zero). Então o mesmo algoritmo pode ser escrito como
$$x_{k+1} = x_k{+}z_k \qquad \text{onde } z_k \text{ é solução de} \qquad Az_k = b{-}Tx_k$$

50. O algoritmo de Gauss-Seidel sempre converge mais rapidamente que o algoritmo de Jacobi.

51. O algoritmo de Gauss-Seidel nunca converge mais rapidamente que o algoritmo de Jacobi.