

Mecânica de Fluidos Computacional I

Prof. Gustavo Carlos Buscaglia

Laboratório de Matemática Aplicada e Computação Científica (LMACC)
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC)
USP – São Carlos

2017

Mecânica dos Fluidos Computacional

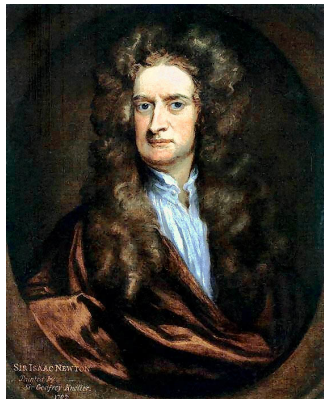
- A Mecânica dos Fluidos é a ciência que estuda o comportamento dos fluidos.
- Este estudo é feito de três formas:
 - **Experimental:** Fenômenos físicos estudados em ambientes controlados.
 - **Teórico:** Obtenção de soluções simplificadas às equações de modelo.
 - **Numérico:** Utilizar o auxílio do computador.
- Neste curso estudaremos a utilização do computador na resolução de vários problemas de mecânica dos fluidos.

Breve histórico

- Desde os primórdios de nossa civilização, o ser humano se interessa pelo movimento dos fluidos (ventos, rios, clima, etc.)
- **Arquimedes** (287-212 a.C.): planejamento de aquedutos, canais, casas de banho, etc.
- **Leonardo da Vinci** (1452-1519): observou e reportou vários fenômenos, reconhecendo sua forma e estrutura, reportando-os na forma de desenhos e esquemas.



Breve histórico

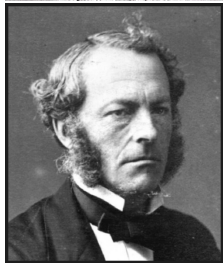


- **Isaac Newton** (1643-1727): Muitas contribuições à mecânica dos fluidos
- Sua segunda lei: $F = m \cdot a$
- Viscosidade: A tensão é proporcional à taxa de deformação.

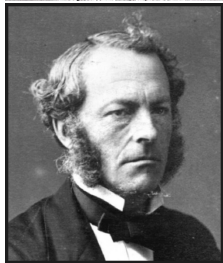


- **Daniel Bernoulli** (1700-1782): Equação de Bernoulli.
- **Leonhard Euler** (1707-1783): Equações de Euler para escoamento invíscido, conservação de quantidade de movimento, conservação de massa, potencial de velocidade.

Breve histórico



- **Claude Louis Marie Henry Navier** (1785-1836)
- **Gabriel Stokes** (1819-1903)
- Introduziram transporte viscoso às equações de Euler, resultando nas equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis



- **Claude Louis Marie Henry Navier** (1785-1836)
- **Gabriel Stokes** (1819-1903)
- Introduziram transporte viscoso às equações de Euler, resultando nas equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) = \\ - \nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla u + \nabla u^T)] + \rho g \\ \nabla \cdot u = 0\end{aligned}$$

Breve histórico

- **Lewis Fry Richardson** (1881-1953): desenvolveu o primeiro método numérico para previsão do tempo (escoamento atmosférico)
- Sua tentativa de calcular a previsão do tempo para um período de 8 horas lhe tomou 6 semanas de cálculos, e foi um fracasso.
- Forecast-factory



Mecânica dos fluidos computacional

- Soluções numéricas das equações de Navier-Stokes demandam muitos cálculos.
(em 1953, **M. Kawaguti** calculou a solução de um escoamento em torno de um cilindro, levou 18 meses trabalhando 20 horas por semana).
- A evolução da computação beneficia diretamente a área.
- Hoje, com o advento dos supercomputadores, é possível resolver escoamentos complexos com precisão em tempo factível.

Objetivo da disciplina

- Mostrar como, utilizando a modelagem matemática e o cálculo numérico, é possível resolver problemas de mecânica de fluidos cuja resolução analítica é impossível.

- Cada capítulo do curso será resolvido um problema.
- A modelagem física e matemática será desenvolvida pelo professor.
- O professor sugerirá um ou vários tratamentos numéricos, e os explicará detalhadamente.
- Os estudantes, em grupos de 2, implementarão um programa para cada problema.
- Os programas serão testados e comparados.
- Um estudante escolhido aleatoriamente de cada grupo realizará uma apresentação de quinze minutos. Os slides serão considerados como relatório do grupo.
- A nota final será calculada a partir das notas obtidas em cada trabalho, sendo que todos os capítulos devem ser aprovados.

- 1 Cálculo de forças e torques em hidrostática. Dinâmica de corpos rígidos flutuantes e seu cálculo numérico.
- 2 Aproximação numérica de interfaces com tensão superficial. Minimização da energia e aproximação variacional.
- 3 Modelagem numérica de redes hidráulicas. Origem e tratamento das não-linearidades.
- 4 Resolução numérica das equações de Navier-Stokes incompressíveis. Convergência em malha a uma solução manufaturada.

Técnicas numéricas envolvidas em cada capítulo

- 1 Parametrização de formas. Interpolação. Integração numérica. EDOs numéricas.
- 2 EDOs numéricas. Minimização de funções.
- 3 Grafos e sua representação computacional. Resolução de sistemas de equações não lineares.
- 4 Diferenças finitas. Volumes finitos. Aproximação numérica de EDPs. Cálculo experimental de ordem de convergência.

Tecnologias relacionadas com cada capítulo

- 1 Engenharia civil. Forças em represas, em prédios, etc. Engenharia naval. Estabilidade de estruturas flutuantes, navios, etc.
- 2 Indústria química. Pintura por imersão, por deposição de sprays. Impressão de jato de tinta. Indústria do petróleo. Separação de misturas. Misturas bifásicas.
- 3 Engenharia hidráulica. Distribuição urbana de água.
- 4 Microfluídica. Lab on a chip. Incorporando turbulência numérica (que não veremos): Meteorologia, Oceanografia, Indústria automotiva, etc.

Duração estimada de cada capítulo

- 1 Cálculo de forças e torques em hidrostática. Dinâmica de corpos rígidos flutuantes e seu cálculo numérico. $\Rightarrow$ **3 semanas**
- 2 Aproximação numérica de interfaces com tensão superficial. Minimização da energia e aproximação variacional. $\Rightarrow$ **4 semanas**
- 3 Modelagem numérica de redes hidráulicas. Origem e tratamento das não-linearidades. $\Rightarrow$ **3 semanas**
- 4 Resolução numéricas das equações de Navier-Stokes incompressíveis. Convergência em malha a uma solução manufaturada. $\Rightarrow$ **4 semanas**

- Essa disciplina é direcionada a alunos do BMAcc, com menos formação em física e fluidos que alunos de engenharia ou física. Em cada capítulo será feita uma revisão rigorosa mas rápida dos conceitos de mecânica que sejam necessários.
- Se espera que os estudantes tenham familiaridade com o cálculo numérico. Os conceitos usados serão definidos mas não fundamentados teoricamente.
- É necessário saber programar. As aulas conterão exemplos de implementação em Octave.
- Seria conveniente ter acesso a uma notebook por grupo.
- Cada capítulo envolverá 2 ou 3 aulas de trabalho em sala, consultando ao professor e/ou ao PAE.
- Haverá sessões de monitoria em laboratório. Definir dia e horário.

Simulação numérica de corpos em flutuação

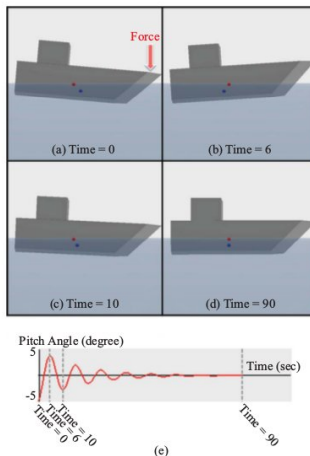


Fig. 10. (a)-(d) Snapshots of the pitch motion of a ship, (e) the magnitude of the pitch motion at each time step.

Exemplos

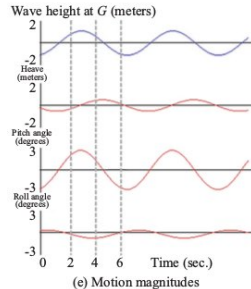
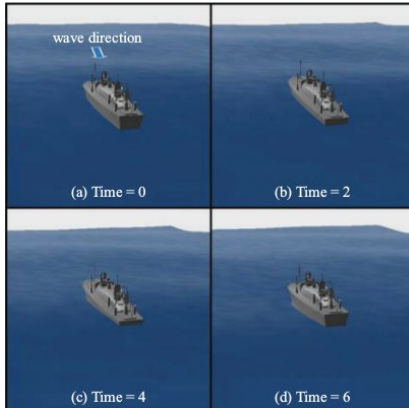
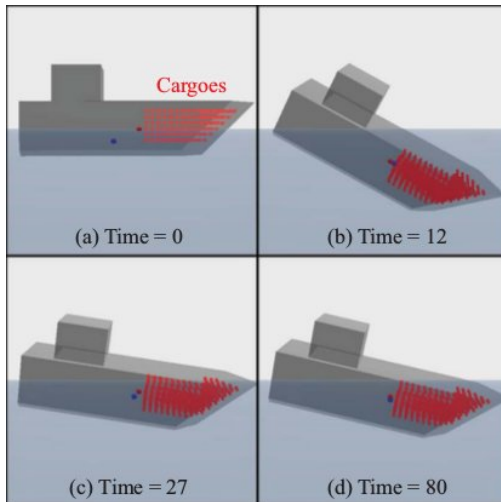


Fig. 11. (a)-(d) Snapshots of the wave-induced motions, (e) the wave height at G and the magnitudes motion at each time step.

Exemplos



■ Estruturas



*Fig. 4 Nordhordland Floating Bridge,
Norway*



*Fig. 5 West India Quay Footbridge,
United Kingdom*

Exemplos



Fig. 9. Shirashima Floating Oil Storage Base, Japan (Photo courtesy of Shirashima Oil Storage Co Ltd)



Fig. 10 Kamigoto Floating Oil Storage Base, Nagasaki Prefecture, Japan



*Fig. 13 Concept Design of a Clean Energy Plant
by Floating Structure Association of Japan*

Exemplos



Fig. 15 Mega-Float in Tokyo Bay, Japan (Photo courtesy of SRCJ)



Fig. 16 Proposed Floating Runway at Tokyo International Airport (Haneda)

Exemplos

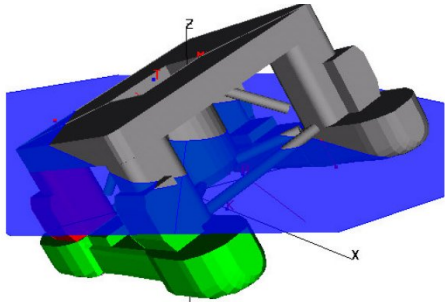


Figure 26- Sstab evaluation of flooding using measured drafts.

Como flutuam os corpos?

■ Equilíbrio dinâmico entre:

- Peso próprio
- Forças exercidas pelo líquido
- Forças exercidas pela atmosfera (vento)
- Forças externas (âncoras,...)

$$M \frac{d^2 \vec{c}}{dt^2} = \sum \vec{F}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{T}$$

onde $\vec{c}$ é a posição do centro de massa, $\vec{F}$ força, $\vec{L}$ momento angular e $\vec{T}$ torque (ambos respeito de $\vec{c}$).

- O corpo *deforma* pelas forças aplicadas.
- Os fluidos *respondem* à presença do corpo.

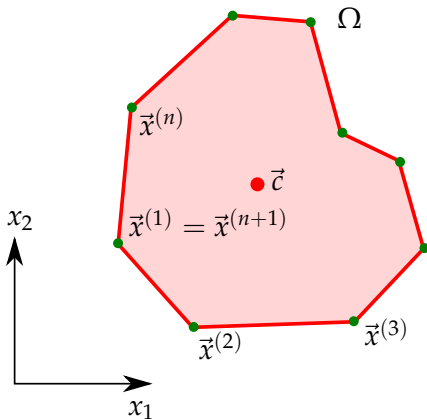
Descrição geométrica do corpo

- Existem diversas maneiras: Primitivas, interpolatórias com/sem malha, etc.
- Consideraremos a seguinte:
 - A superfície $\mathcal{S}$ do corpo é a união disjunta de um conjunto de patches, cada um deles sendo a imagem de um símlice M por uma transformação $\vec{\phi} : M \rightarrow \mathbb{R}^d$.

$$\mathcal{S} = \cup_K \vec{\phi}_K(M)$$

- A geometria de cada patch é definida por um conjunto de nós.

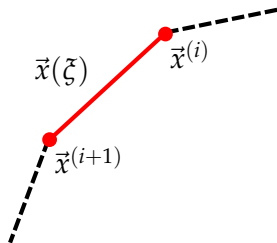
Representação linear por partes em 2D



Lista de pontos:

$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$
$x_1^{(2)}$	$x_2^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$
$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$
$x_1^{(n+1)}$	$x_2^{(n+1)}$

Representação linear por partes em 2D

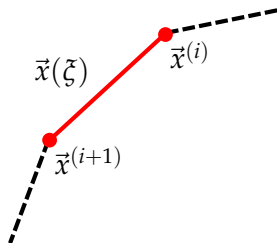


$$\vec{x}(\xi) = \vec{\varphi}_{K=i}(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \vec{x}^{(i)} + \frac{1+\xi}{2} \vec{x}^{(i+1)},$$

$$\xi \in M = [-1, 1]$$

A imagem de $\vec{\varphi}_i$ é o segmento reto de $\vec{x}^{(i)}$ a $\vec{x}^{(i+1)}$.

Representação linear por partes em 2D



- Cálculo do Jacobiano (comprimento de arco):

$$ds = |d\vec{x}| = \left\| \frac{d\vec{x}}{d\xi} \right\| d\xi = \left\| \frac{\vec{x}^{(i+1)} - \vec{x}^{(i)}}{2} \right\| d\xi$$

- Cálculo da normal (anti-horária):

$$\vec{d} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{x}^{(i+1)} - \vec{x}^{(i)}, \quad \vec{n} = \frac{(d_2, -d_1)}{\|\vec{d}\|}$$

Ambos constantes em cada patch.

Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^d$, então

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} f(\vec{x}) \, d\mathcal{S} &= \sum_K \int_{\vec{\varphi}_K(M)} f(\vec{x}) \, d\mathcal{S} \\ &= \sum_K \int_M f(\underbrace{\vec{\varphi}_K(\vec{\xi})}_{\vec{x}(\vec{\xi})}) \underbrace{\frac{d\mathcal{S}}{dM}}_{\text{Jacobiano de } \vec{\varphi}_K} \, dM.\end{aligned}$$

- A integral de curva/superfície transformou-se numa soma de integrais sobre um único símplice M .
- Em 1D, certamente escolhemos $M = [-1, 1]$.

- Dados três pontos arbitrários em 3D, com coordenadas $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ e $\vec{x}^{(3)}$, determinar uma transformação $\vec{\varphi} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ que transforme o triângulo unitário M (com vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$) no triângulo plano definido pelos três pontos.
- Quanto vale o Jacobiano dessa transformação?

Integração em $\mathcal{S}$, caso 1D

Nos cálculos, vão aparecer **muitas** integrais da forma

$$\int_{\mathcal{S}} f(\vec{x}) \, ds = \sum_K \int_{-1}^1 \underbrace{f(\vec{\varphi}_K(\xi))}_{g(\xi)} \frac{ds}{d\xi} \, d\xi .$$

Quadratura de Gauss-Legendre

Existe uma quadratura

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \simeq \sum_{k=1}^N A_k g(\xi_k)$$

que integra exatamente polinômios de grau $2N - 1$. Se esperamos que a função a integrar seja aproximável por um polinômio desse grau, escolhemos:

$N = 2$	$N = 3$
$\xi_1 = -1/\sqrt{3} \quad A_1 = 1$	$\xi_1 = -\sqrt{3/5} \quad A_1 = 5/9$
$\xi_2 = 1/\sqrt{3} \quad A_2 = 1$	$\xi_2 = 0 \quad A_2 = 8/9$
	$\xi_3 = \sqrt{3/5} \quad A_3 = 5/9$

Integração em $\mathcal{S}$, numérica

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} f(\vec{x}) \, ds &= \sum_K \int_{-1}^1 \underbrace{f(\vec{\varphi}_K(\xi))}_{g(\xi)} \frac{ds}{d\xi} \, d\xi . \\ &\simeq \sum_K \sum_{k=1}^N A_k \underbrace{f(\vec{\varphi}_K(\xi_k))}_{f(\vec{x}_k)} \frac{ds}{d\xi}\end{aligned}$$

A seguir, alguns exemplos de cálculos de integrais sobre superfícies “numéricas”.

Cálculo do volume (2D) encerrado em $\mathcal{S}$

$$\begin{aligned} V &= \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \operatorname{div} \vec{x} \, dx \, dy \\ &= \oint_{\mathcal{S}} \frac{1}{2} \vec{x} \cdot \vec{n} \, ds \\ &= \sum_K \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{2} \vec{x}_k \cdot \vec{n}_k \frac{ds}{d\zeta}(\zeta_k) \end{aligned}$$

Indeed, if the geometrical interpolation is $\mathbb{P}_1$, then for each K we have that $\vec{x}(\zeta)$ is $\mathbb{P}_1$ while $\vec{n}$ and $ds/d\zeta$ are constant in each segment (in fact, $ds/d\zeta = \ell_K/2$).

The integrand is thus $\mathbb{P}_1$, so that $N = 1$ suffices to compute the volume to roundoff error.

Cálculo do centro de massa de um polígono homogêneo

$$\begin{aligned}
 \vec{c} &= \frac{1}{3V} \begin{bmatrix} \oint_{\partial\Omega} (\vec{x} \cdot \vec{n}) x_1 ds \\ \oint_{\partial\Omega} (\vec{x} \cdot \vec{n}) x_2 ds \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{3V} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 (\vec{x}(\xi) \cdot \vec{n}^{(i)}) x_1(\xi) \frac{\ell_i}{2} d\xi \\ \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 (\vec{x}(\xi) \cdot \vec{n}^{(i)}) x_2(\xi) \frac{\ell_i}{2} d\xi \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{3V} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N A_k \vec{x}_k \cdot \vec{n}^{(i)} x_{1k} \frac{\ell_i}{2} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N A_k \vec{x}_k \cdot \vec{n}^{(i)} x_{2k} \frac{\ell_i}{2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Cálculo do empuxo hidrostático

- A força de pressão por unidade de área que um meio fluido faz sobre um corpo que ocupa um domínio Ω é dada por

$$\vec{f}_p = -p, \vec{n}.$$

A força total é obtida por integração em S ,

$$\vec{F}_p = \int_S -p \vec{n} dS.$$

- Se o fluido está imóvel (estático), a única força é a de pressão. Se não, devem ser consideradas também as forças *viscosas*.

- Considerando a superfície livre do fluido num instante t como sendo

$$x_2 = Z(t, x_1) , \quad (x_3 = Z(t, x_1, x_2) \text{ em 3D}),$$

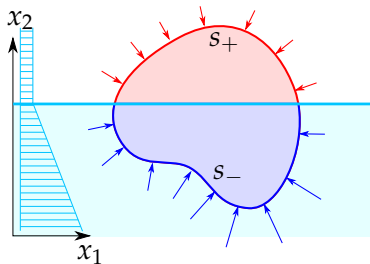
a aproximação de pressão hidrostática é

$$p(t, x_1, x_2) = p_{atm}(t, x_1) + \rho_L g \max(0, Z(t, x_1) - x_2)$$

- Em geral se toma p_{atm} independente de $\vec{x}$.
- Caso estático: $Z(t, x_1) = \text{constante}$.
- Enchimento/esvaziamento quaseestático: $Z(t, x_1) = h(t)$.
- Onda de celeridade v :

$$Z(t, x_1) = h(x - vt) , \quad \text{e.g.;} \quad Z(t, x_1) = h_0 + a \sin(k(x_1 - vt)) .$$

Caso estático



$$\vec{F}_A = \int_{s_+} -p_{atm} \vec{n} \, ds = -p_{atm} \int_{s_+} \vec{n} \, ds$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= \int_{s_-} -p(\vec{x}) \vec{n} \, ds \\ &= \int_{s_-} -[p_{atm} + \rho_L g(z - x_2)] \vec{n} \, ds \\ &= -p_{atm} \int_{s_-} \vec{n} \, ds - \rho_L g \int_{s_-} (z - x_2) \vec{n} \, ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_A + \vec{F}_L = -p_{atm} \int_{s_+} \vec{n} \, ds - p_{atm} \int_{s_-} \vec{n} \, ds - \rho_L g \int_{s_-} (z - x_2) \vec{n} \, ds \\ &= -p_{atm} \oint_{s_+ \cup s_-} \vec{n} \, ds - \rho_L g \int_{s_-} (z - x_2) \vec{n} \, ds \end{aligned}$$

0

- Como p_{atm} não tem influência no balanço de forças, pode-se definir $p_{atm} = 0$.
- *Princípio de Arquimedes*: No caso estático o empuxo é igual ao peso do líquido deslocado, e de sentido contrário.
- Se Z ou p_{atm} dependem de x_1 , o empuxo tem componente horizontal.

- Programe uma função que, a partir da matriz de coordenadas coor de um polígono e da função $Z(t, x_1)$, calcule o empuxo do líquido sobre o corpo.
- Grafique as componentes horizontal e vertical do empuxo como função do tempo.
- Considere $Z(t, x_1) = t$, e outra função que represente uma onda que passa pela posição do corpo.

A partir dos conceitos desenvolvidos, uma formulação razoável seria:

- Seja x_j^i a componente j do vetor de coordenadas do nó i , com $i = 1, \dots, N$. Isto poderia ser uma matriz `coor(1:n, 1:2)` em que cada linha é o vetor (linha) posição de um nó. Por exemplo,

```
n=4; coor=[0 0;1 0;1 2;0 2];  
coor=[coor;[coor(1,:)]];  
constroi o retângulo  $(0,1) \times (0,2)$ 
```

- A regra de quadratura poderia ser

```
N=3; xi=[-sqrt(3/5),0,sqrt(3/5)];A=[5/9,8/9,5/9];
```

- Pesos interpolatórios $(1 - \xi)/2$ e $(1 + \xi)/2$:

```
pint=[(1-xi)/2;(1+xi)/2];
```

- Imagens dos pontos de quadratura no segmento ("patch") i

```
for k=1:N  
    x(1,k)=pint(1,k)*coor(i,1)+pint(2,k)*coor(i+1,1);  
    x(2,k)=pint(1,k)*coor(i,2)+pint(2,k)*coor(i+1,2);  
endfor
```

- Os Jacobianos e vetores normais:

```
d=[coor(2:n+1,:)-coor(1:n,:)];ll=norm(d,"rows");jac=ll/2;  
  
normal=[d(:,2)./ll,-d(:,1)./ll]
```

■ Integral da função $f = 1$ (perímetro):

```
perim=0;
for i=1:n
    perim=perim+A*ones(N,1)*jac(i);
endfor
```

■ Integral de função arbitrária:

```
f=@(x) x(1)*x(2);
res=0;
for i=1:n
    for k=1:N
        x=pint(1,k)*coor(i,:)'+pint(2,k)*coor(i+1,:);
        res=res+A(k)*f(x)*jac(i);
    endfor
endfor
```

■ Integral da normal (= 0):

```
res=[0;0];  
for i=1:n  
    for k=1:N  
        res=res+A(k)*normal(i,:)'*jac(i);  
    endfor  
endfor
```

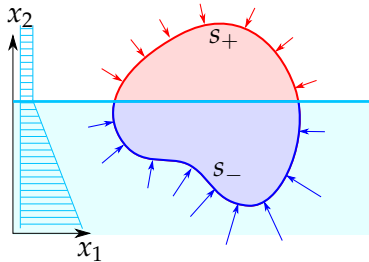
■ Integral de $\frac{1}{2}\vec{x} \cdot \vec{n}$ (=volume):

```
res=0;  
for i=1:n  
    for k=1:N  
        x=pint(1,k)*coor(i,:)'+pint(2,k)*coor(i+1,:);  
        res=res+A(k)*1/2*normal(i,1:2)*x*jac(i);  
    endfor  
endfor
```

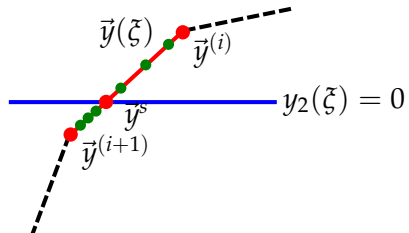
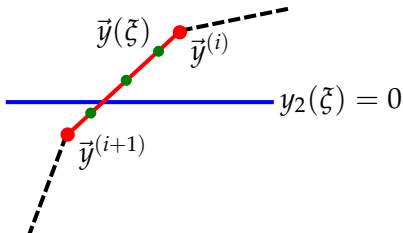
■ Empuxo:

```
Z=@(t,x1) 1.5;  
p=@(t,x) max(0,Z(t,x(1))-x(2));  
t=0;  
res=[0;0];  
for i=1:n  
    for k=1:N  
        x=pint(1,k)*coor(i,:)'+pint(2,k)*coor(i+1,:);  
        res=res+A(k)*normal(i,1:2)'*(-p(t,x))*jac(i);  
    endfor  
endfor
```

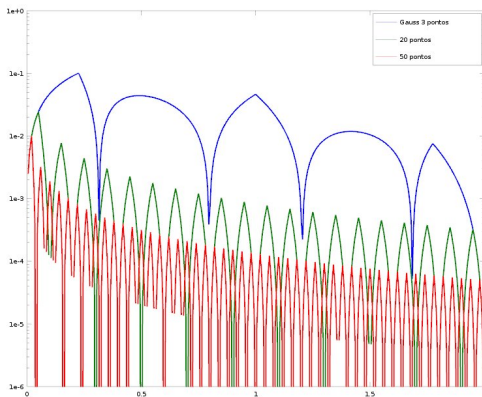
Erros de integração



- A função $p(t, \vec{x})$ **não é um polinômio** ao longo das arestas cortadas pela superfície livre. Isto, no caso de corpos com arestas muito compridas, requer uma integração especial.



- Consideremos o quadrilátero definido pelos pontos $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,2)$ e $(0,2)$. Seu empuxo (Arquimedes) é, em função da altura da água, $E(z) = \rho g z (1 + z/2)$.
- Na figura se compara o **erro relativo** de usar quadratura de Gauss de 3 pontos, com o de quadraturas de 20 e 50 pontos.



Cálculo do torque de pressão

- O **torque** é a quantidade que governa as rotações, assim como a **força** governa as translações.
- É uma quantidade **vetorial** (pseudo), mas em 2D é escalar.

$$\vec{T}_P = \int_S (\vec{x} - \vec{c}) \times (-p(\vec{x}) \vec{n}) dS$$

- O torque é medido **respeito de um centro de rotação**, nesse caso $\vec{c}$.
- Quando o centro de rotação coincide com o centro de massa, a dinâmica rotacional é dada por $I \omega'(t) = T$.

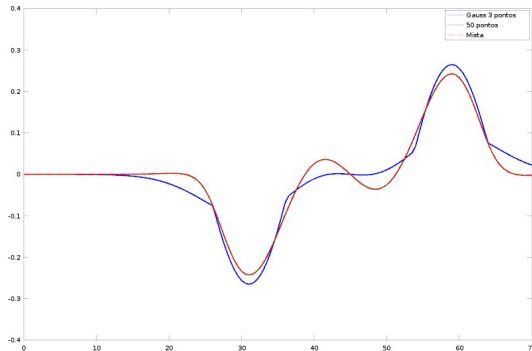
■ Torque:

```
Z=@(t,x1) 1.+exp(-(x1-0.1*t+3)^2/0.16);  
p=@(t,x) max(0,Z(t,x(1))-x(2));  
t=0; res=0;  
for i=1:n  
    for k=1:N  
        x=pint(1,k)*coor(i,:)'+pint(2,k)*coor(i+1,:);  
        ff=(x(1)-cg(1))*normal(i,2)-(x(2)-cg(2))*normal(i,1);  
        res=res+A(k)*ff*(-p(t,x))*jac(i);  
    endfor  
endfor
```

Erro de integração

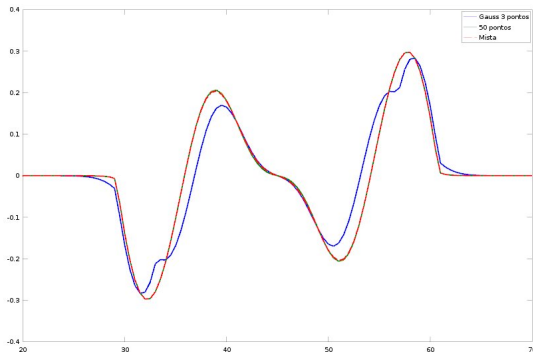
- Consideremos o quadrilátero definido pelos pontos $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,2)$ e $(0,2)$. Calculamos o torque respeito de $\vec{c}$ quando passa a onda

$$Z(t, x_1) = 1 + \exp \left(- (x_1 + 3 - 0.1 t)^2 \right) .$$



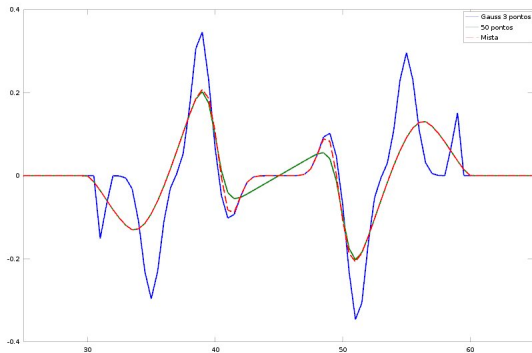
Onda mais ingreme,

$$Z(t, x_1) = 1 + \exp \left(- \frac{(x_1 + 3 - 0.1 t)^2}{0.4^2} \right) .$$



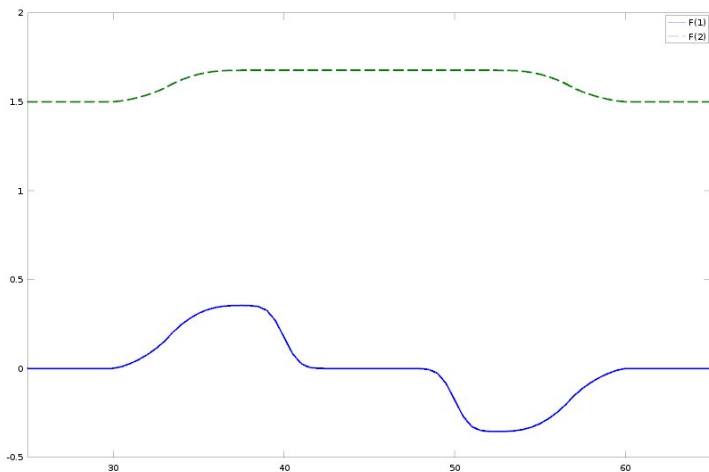
Onda ainda mais ingreme,

$$Z(t, x_1) = 1 + \exp \left(- \frac{(x_1 + 3 - 0.1 t)^2}{0.1^2} \right) .$$



O método misto também dá resultado errado, porque a integração de 3 pontos não consegue capturar a onda.

Complementemos vendo o empuxo para essa última onda.



Definição (Corpo rígido)

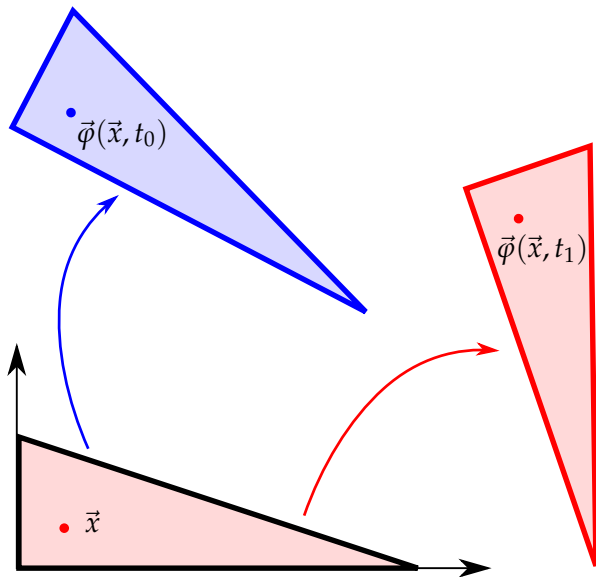
Um corpo Ω é dito rígido se, quando submetido a um movimento, as distâncias entre seus pontos não variam.

Para conseguir descrever o movimento de corpos rígidos, usaremos uma transformação

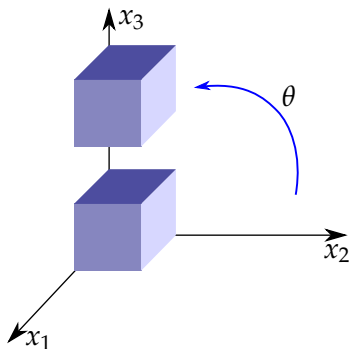
$$\vec{\varphi} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\vec{x} \mapsto \vec{\varphi}(\vec{x}, t)$$

onde $\vec{x}$ é tomado em uma configuração de referência de Ω e $\vec{\varphi}(\vec{x}, t)$ é a posição ocupada no tempo t pela partícula do corpo que na configuração de referência está no ponto $\vec{x}$.

Corpo rígido



Exemplo



Rotação em torno do eixo x_1 de um cubo deslocado em $x_3 = 2$, por um ângulo $\theta(t)$. A configuração de referência do cubo permanece na origem.

$$\vec{\phi}(\vec{x}, t) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) \\ 0 & \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 + 2 \end{bmatrix}$$

Teorema (Representação do movimento)

Uma transformação $\vec{x} \mapsto \vec{\psi}(\vec{x})$ satisfaz

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{\psi}(\vec{x}) - \vec{\psi}(\vec{y})\|$$

se e somente se existe uma matriz ortogonal $Q \in \mathbb{R}^{d \times d}$ e um vetor $\vec{b} \in \mathbb{R}^d$ tais que

$$\vec{\psi}(\vec{x}) = Q \cdot \vec{x} + \vec{b}$$

Teorema (Representação do movimento)

Uma transformação $\vec{x} \mapsto \vec{\psi}(\vec{x})$ satisfaz

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{\psi}(\vec{x}) - \vec{\psi}(\vec{y})\|$$

se e somente se existe uma matriz ortogonal $Q \in \mathbb{R}^{d \times d}$ e um vetor $\vec{b} \in \mathbb{R}^d$ tais que

$$\vec{\psi}(\vec{x}) = Q \cdot \vec{x} + \vec{b}$$

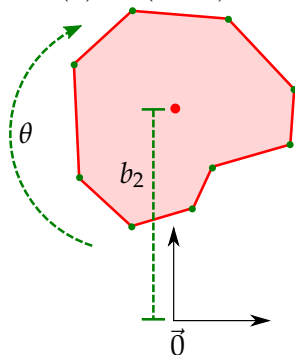
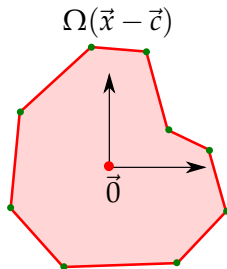
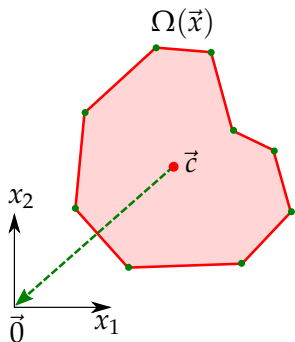
Definição (Movimento rígido)

São transformações da forma

$$\vec{\varphi}(\vec{x}, t) = Q(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}(t)$$

Movimentos rígidos

$$\vec{\varphi}(\theta, b_2) = Q(\theta) \cdot \Omega(\vec{x} - \vec{c}) + \vec{b}$$



Transformação rígida que rota o corpo um ângulo θ e leva o centro $\vec{c}$ à posição $\vec{b} = (0, b_2)$.

Transformação das coordenadas dos nós

Lembremos que

$$\vec{\varphi}(\vec{x}) = Q_{\theta} (\vec{x} - \vec{c}) + \vec{b}$$

onde $\vec{x}$ pertence à configuração de referência (coor0).

```
n=4; coor0=[1 0;2 0;3 2;0 2];  
coor0=[coor0;[coor0(1,:)]];  
cg=[1.5;0.5];  
theta=60*(2*pi/360);b=[0;0];  
qq=[cos(theta) -sin(theta);sin(theta) cos(theta)];  
for i=1:n+1  
    coor(i,:)=(qq*(coor0(i,:)'-cg)+b)';  
endfor
```

Assim, podemos estudar empuxo e torque em diversas posições do corpo.

Projeto: Parte I - Estática

Consideramos um corpo bidimensional homogêneo cuja geometria é dada por um vetor de coordenadas $\text{coor0}(n, 2)$ e cuja densidade é ρ (a densidade da água é 1, assim como a gravidade). O centro de massa está sempre em $x_1 = 0$, mas o corpo pode rotacionar e movimentar verticalmente. A superfície livre é horizontal ($x_2 = 0$).

- 1 Programe um código que, para cada valor de ρ , construa um gráfico do torque T como função do ângulo θ . A posição vertical para cada ângulo deve ser tal que o empuxo equilibre ao peso.
- 2 Identifique assim as posições de equilíbrio para cada ρ e analise sua estabilidade.

Dinâmica de uma partícula pontual

- Partícula de massa m , posição $\vec{x}$, força aplicada total $\vec{F}$.
- Momento linear: $\vec{p} = m \vec{v} = m \frac{d\vec{x}}{dt}$.
- Segunda lei de Newton: $m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$.
- Energia cinética: $K = \frac{m}{2} \|\vec{v}\|^2$.

Momentos angulares

- Momento de uma força (torque) em $\vec{x}$ respeito de $\vec{0}$:

$$\vec{T} = \vec{x} \times \vec{F}$$

- Momento respeito de um eixo pela origem de direção $\check{e}$: $T_{\check{e}} = \check{e} \cdot \vec{T}$.
- **Momento angular respeito de $\vec{0}$:**

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} = \vec{x} \times (m\vec{v})$$

- Conservação do momento angular:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{x} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{x} \times \vec{F} = \vec{T}$$

que é simplesmente uma re-escrita de $F = ma$.

Várias partículas

- Partícula k , massa m_k , posição $\vec{x}^k$, momento $\vec{p}^k = m_k \vec{v}^k$.
- Força (externa + inter-partículas):

$$\vec{F}^k = \vec{F}_e^k + \sum_{j \neq k} \vec{F}^{j \rightarrow k}$$

- Força total, momento linear total:

$$\vec{F} = \sum_k \left(\vec{F}_e^k + \sum_{j \neq k} \vec{F}^{j \rightarrow k} \right) = \sum_k \vec{F}_e^k, \quad \vec{p} = \sum_k \vec{p}^k$$

- Conservação do momento linear (segunda lei para várias partículas):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_k \frac{d\vec{p}^k}{dt} = \sum_k \left(\vec{F}_e^k + \sum_{j \neq k} \vec{F}^{j \rightarrow k} \right) = \vec{F}$$

Centro de massa

■ Massa total: $M = \sum_k m_k$.

■ Centro de massa:

$$\vec{c} = \frac{1}{M} \sum_k m_k \vec{x}^k \quad \rightarrow \quad \frac{1}{M} \int_{\Omega} \rho \vec{x} d\Omega$$

■ Então,

$$\vec{p} = M \frac{d\vec{c}}{dt}, \quad M \frac{d^2\vec{c}}{dt^2} = \vec{F}$$

o centro de massa se comporta como uma partícula pontual.

Momento angular de várias partículas

- Momento angular total, torque total:

$$\vec{L} = \sum_k \vec{L}^k = \sum_k \vec{x}^k \times \vec{p}^k, \quad \vec{T} = \sum_k \vec{x}^k \times \vec{F}_e^k$$

- Conservação do momento angular:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_k \frac{d\vec{L}^k}{dt} = \sum_k \vec{x}^k \times \left(\vec{F}_e^k + \sum_{j \neq k} \vec{F}^{j \rightarrow k} \right) = \\ &= \sum_k \vec{x}^k \times \vec{F}_e^k + \underbrace{\sum_k \left(\vec{x}^k \times \sum_{j \neq k} \vec{F}^{j \rightarrow k} \right)}_{=0!} = \vec{T} \end{aligned}$$

- Essa equação é agora **independente da conservação do momento linear**.

Equações dinâmicas de corpo rígido

- Um conjunto de partículas deve satisfazer as 6 EDOs (3 em 2D)

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{T}\end{aligned}$$

- Se o conjunto é rígido, ele tem coincidentemente 6 graus de liberdade apenas (3 em 2D).
- **Felizmente**, as 6 EDOs **determinam totalmente** os 6 graus de liberdade! As equações dinâmicas são um sistema fechado.
- Apenas devemos trabalhar um pouco mais para levar à forma final...

Momento angular de corpo rígido

■ Movimento rígido:

$$\vec{x}^k(t) = \vec{\varphi}(\vec{X}^k, t) = Q(t)\vec{X}^k + \vec{b}(t), \quad \vec{X}^k = Q(t)^T(\vec{x}^k(t) - \vec{b}(t))$$

■ Velocidade:

$$\vec{v}^k(t) = \frac{dQ}{dt}(t)\vec{X}^k = \frac{dQ}{dt}(t) Q(t)^T(\vec{x}^k(t) - \vec{b}(t))$$

■ $Q(t)Q(t)^T = \mathbb{I} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} Q^T$ é antissimétrica.

$$0 = \frac{d}{dt}(Q Q^T) = \frac{dQ}{dt} Q^T + Q \frac{dQ^T}{dt} = \frac{dQ}{dt} Q^T + \left(\frac{dQ}{dt} Q^T \right)^T$$

- Produto com matrizes antissimétricas é equivalente a produto vetorial por (pseudo)vetor.

$$A(\vec{\omega}) \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \check{\mathbf{i}} & \check{\mathbf{j}} & \check{\mathbf{k}} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{z}$$

- No caso 2D, simplesmente tomar $\vec{\omega} = \omega \check{\mathbf{k}}$, e $A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{v}^k(t) = \vec{\omega}(t) \times (\vec{x}^k(t) - \vec{b}(t)) = \vec{\omega}(t) \times \vec{x}^k(t) + \vec{V}(t)$
Onde $\vec{V}$ é a velocidade da partícula atualmente em $\vec{0}$.
- Notar que, sendo $A(\vec{\omega}) = \frac{dQ}{dt} Q^T$,

$$\frac{dQ}{dt} = A(\vec{\omega}) Q$$

Em 2D isto é simplesmente $\frac{d\theta}{dt} = \omega$.

- Substituindo,

$$\vec{L} = \sum_k \vec{x}^k \times m_k \vec{V} + \sum_k m_k \vec{x}^k \times (\vec{\omega} \times \vec{x}^k)$$

o primeiro termo é zero se tomamos momentos respeito de $\vec{c}(t)$.

- Utilizando $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$,

$$\vec{L} = \underbrace{\left[\sum_k m_k \left(\|\vec{x}^k\|^2 \mathbb{I} - \vec{x}^k (\vec{x}^k)^T \right) \right]}_{\mathcal{J}} \vec{\omega} \rightarrow \left[\int_{\Omega} \rho (\|\vec{x}\|^2 \mathbb{I} - \vec{x} \vec{x}^T) d\Omega \right] \vec{\omega}$$

- $\mathcal{J}$ é o **tensor (matriz) de inércia angular**.

$$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathcal{J} \vec{\omega}) = \mathcal{J} \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\mathcal{J} \vec{\omega})}_{0 \text{ em 2D}} \quad \left(\frac{d\mathcal{J}}{dt} = 0 \text{ em 2D} \right)$$

Equações finais em 2D

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{c} \\ \theta \\ \vec{p} \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{V} \\ \omega \\ \vec{F} \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{M} \vec{p} \\ \frac{1}{J} L \\ \vec{F} \\ T \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{J} = \int_{\Omega^0} \rho(x_1^2 + x_2^2) d\Omega^0$, pre-calculado, independente do tempo.
- Forças totais = Peso + Empuxo + “Amortecimento” ($= -\beta \vec{V}$, onde β poderia ser matriz diagonal)
- Torque total = Torque líquido + “Amortecimento” ($= -\gamma \omega$)

Projeto: Parte II - Dinâmica

Consideramos o mesmo corpo da Parte I. A posição inicial é dada por $\vec{c}(0)$ e $\theta(0)$, a velocidade inicial é nula. Pede-se um código que resolva a dinâmica com a superfície dada por uma função $Z(x_1, t)$ arbitrária.

- 1 Calculamos resposta a perturbações nos equilíbrios calculados na parte I, com $Z(x_1, t) = 0$. Ajustar β e γ para que o sistema seja levemente amortecido.
- 2 Calculamos resposta a uma onda cuja frequência seja menor/parecida/menor que as frequências de oscilação do sistema (ponto anterior).

Equações finais em 3D

- No caso 2D a orientação era um ângulo $\theta(t)$. Em 3D ela é dada pela matriz $Q(t)$.
- No caso 2D o tensor $\mathcal{J}$ é um número constante. Em 3D é uma matriz **que varia com a orientação**. Se $\mathcal{J}_0$ é o momento de inércia na posição de referência,

$$\mathcal{J}(t) = Q(t) \mathcal{J}_0 Q(t)^T, \quad \mathcal{J}^{-1} = Q \mathcal{J}_0^{-1} Q^T$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{c} \\ Q \\ \vec{p} \\ \vec{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{V} \\ A(\vec{\omega}) Q \\ \vec{F} \\ \vec{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{M} \vec{p} \\ A(Q \mathcal{J}_0^{-1} Q^T \vec{L}) Q \\ \vec{F} \\ \vec{T} \end{pmatrix}$$

- Os graus de liberdade de rotação são 3, **porém estamos representando as rotações com uma matriz ortogonal (9 incógnitas!)**.
- O sistema depende fortemente de $Q(t)$ ser ortogonal para todo t .
- **Exercício:** Prove que, se Q satisfaz $dQ/dt = A(t)Q(t)$ com $A(t)$ antissimétrica, e $Q(0)$ é ortogonal, então $Q(t)$ é ortogonal $\forall t$.
- **Quando se utiliza resolução numérica, a matriz Q perde ortogonalidade por erro de aproximação!**
- **Exercício:** Provar que a aproximação de Euler $Q_{n+1} = Q_n + \Delta t A_n Q_n$ faz que Q_{n+1} não seja ortogonal, de fato

$$Q_{n+1}Q_{n+1}^T = \mathbb{I} - (\Delta t A_n)^2.$$

- Ambas dificuldades acima levam a preferir os **quatérnions**.