

Mecânica de Fluidos Computacional I

Prof. Gustavo Carlos Buscaglia

Laboratório de Matemática Aplicada e Computação Científica (LMACC)
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC)
USP – São Carlos

2017

Mecânica dos Fluidos Computacional

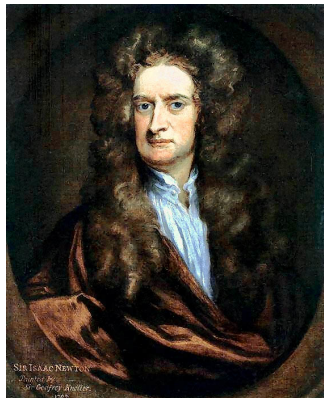
- A Mecânica dos Fluidos é a ciência que estuda o comportamento dos fluidos.
- Este estudo é feito de três formas:
 - **Experimental:** Fenômenos físicos estudados em ambientes controlados.
 - **Teórico:** Obtenção de soluções simplificadas às equações de modelo.
 - **Numérico:** Utilizar o auxílio do computador.
- Neste curso estudaremos a utilização do computador na resolução de vários problemas de mecânica dos fluidos.

Breve histórico

- Desde os primórdios de nossa civilização, o ser humano se interessa pelo movimento dos fluidos (ventos, rios, clima, etc.)
- **Arquimedes** (287-212 a.C.): planejamento de aquedutos, canais, casas de banho, etc.
- **Leonardo da Vinci** (1452-1519): observou e reportou vários fenômenos, reconhecendo sua forma e estrutura, reportando-os na forma de desenhos e esquemas.



Breve histórico

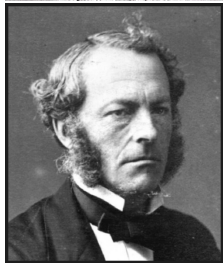


- **Isaac Newton** (1643-1727): Muitas contribuições à mecânica dos fluidos
- Sua segunda lei: $F = m \cdot a$
- Viscosidade: A tensão é proporcional à taxa de deformação.

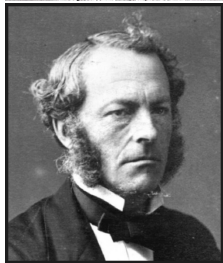


- **Daniel Bernoulli** (1700-1782): Equação de Bernoulli.
- **Leonhard Euler** (1707-1783): Equações de Euler para escoamento invíscido, conservação de quantidade de movimento, conservação de massa, potencial de velocidade.

Breve histórico



- **Claude Louis Marie Henry Navier** (1785-1836)
- **Gabriel Stokes** (1819-1903)
- Introduziram transporte viscoso às equações de Euler, resultando nas equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis



- **Claude Louis Marie Henry Navier** (1785-1836)
- **Gabriel Stokes** (1819-1903)
- Introduziram transporte viscoso às equações de Euler, resultando nas equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) = \\ - \nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla u + \nabla u^T)] + \rho g \\ \nabla \cdot u = 0\end{aligned}$$

Breve histórico

- **Lewis Fry Richardson** (1881-1953): desenvolveu o primeiro método numérico para previsão do tempo (escoamento atmosférico)
- Sua tentativa de calcular a previsão do tempo para um período de 8 horas lhe tomou 6 semanas de cálculos, e foi um fracasso.
- Forecast-factory



Mecânica dos fluidos computacional

- Soluções numéricas das equações de Navier-Stokes demandam muitos cálculos.
(em 1953, **M. Kawaguti** calculou a solução de um escoamento em torno de um cilindro, levou 18 meses trabalhando 20 horas por semana).
- A evolução da computação beneficia diretamente a área.
- Hoje, com o advento dos supercomputadores, é possível resolver escoamentos complexos com precisão em tempo factível.

Objetivo da disciplina

- Mostrar como, utilizando a modelagem matemática e o cálculo numérico, é possível resolver problemas de mecânica de fluidos cuja resolução analítica é impossível.

- Cada capítulo do curso será resolvido um problema.
- A modelagem física e matemática será desenvolvida pelo professor.
- O professor sugerirá um ou vários tratamentos numéricos, e os explicará detalhadamente.
- Os estudantes, em grupos de 2, implementarão um programa para cada problema.
- Os programas serão testados e comparados.
- Um estudante escolhido aleatoriamente de cada grupo realizará uma apresentação de quinze minutos. Os slides serão considerados como relatório do grupo.
- A nota final será calculada a partir das notas obtidas em cada trabalho, sendo que todos os capítulos devem ser aprovados.

- 1 Cálculo de forças e torques em hidrostática. Dinâmica de corpos rígidos flutuantes e seu cálculo numérico.
- 2 Aproximação numérica de interfaces com tensão superficial. Minimização da energia e aproximação variacional.
- 3 Modelagem numérica de redes hidráulicas. Origem e tratamento das não-linearidades.
- 4 Resolução numérica das equações de Navier-Stokes incompressíveis. Convergência em malha a uma solução manufaturada.

Técnicas numéricas envolvidas em cada capítulo

- 1 Parametrização de formas. Interpolação. Integração numérica. EDOs numéricas.
- 2 EDOs numéricas. Minimização de funções.
- 3 Grafos e sua representação computacional. Resolução de sistemas de equações não lineares.
- 4 Diferenças finitas. Volumes finitos. Aproximação numérica de EDPs. Cálculo experimental de ordem de convergência.

Tecnologias relacionadas com cada capítulo

- 1 Engenharia civil. Forças em represas, em prédios, etc. Engenharia naval. Estabilidade de estruturas flutuantes, navios, etc.
- 2 Indústria química. Pintura por imersão, por deposição de sprays. Impressão de jato de tinta. Indústria do petróleo. Separação de misturas. Misturas bifásicas.
- 3 Engenharia hidráulica. Distribuição urbana de água.
- 4 Microfluídica. Lab on a chip. Incorporando turbulência numérica (que não veremos): Meteorologia, Oceanografia, Indústria automotiva, etc.

Duração estimada de cada capítulo

- 1 Cálculo de forças e torques em hidrostática. Dinâmica de corpos rígidos flutuantes e seu cálculo numérico. $\Rightarrow$ **3 semanas**
- 2 Aproximação numérica de interfaces com tensão superficial. Minimização da energia e aproximação variacional. $\Rightarrow$ **4 semanas**
- 3 Modelagem numérica de redes hidráulicas. Origem e tratamento das não-linearidades. $\Rightarrow$ **3 semanas**
- 4 Resolução numéricas das equações de Navier-Stokes incompressíveis. Convergência em malha a uma solução manufaturada. $\Rightarrow$ **4 semanas**

- Essa disciplina é direcionada a alunos do BMAcc, com menos formação em física e fluidos que alunos de engenharia ou física. Em cada capítulo será feita uma revisão rigorosa mas rápida dos conceitos de mecânica que sejam necessários.
- Se espera que os estudantes tenham familiaridade com o cálculo numérico. Os conceitos usados serão definidos mas não fundamentados teoricamente.
- É necessário saber programar. As aulas conterão exemplos de implementação em Octave.
- Seria conveniente ter acesso a uma notebook por grupo.
- Cada capítulo envolverá 2 ou 3 aulas de trabalho em sala, consultando ao professor e/ou ao PAE.
- Haverá sessões de monitoria em laboratório. Definir dia e horário.

Simulação numérica de corpos em flutuação

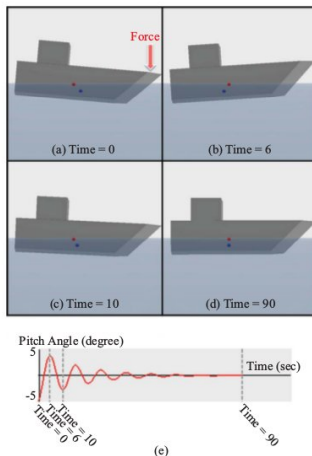


Fig. 10. (a)-(d) Snapshots of the pitch motion of a ship, (e) the magnitude of the pitch motion at each time step.

Exemplos

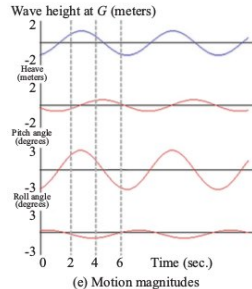
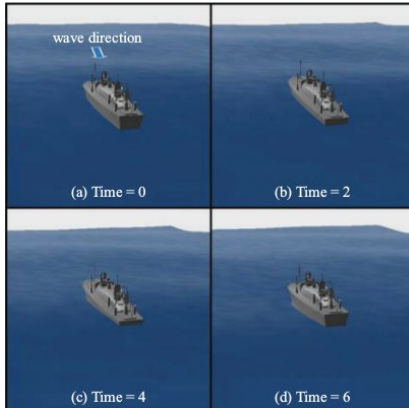
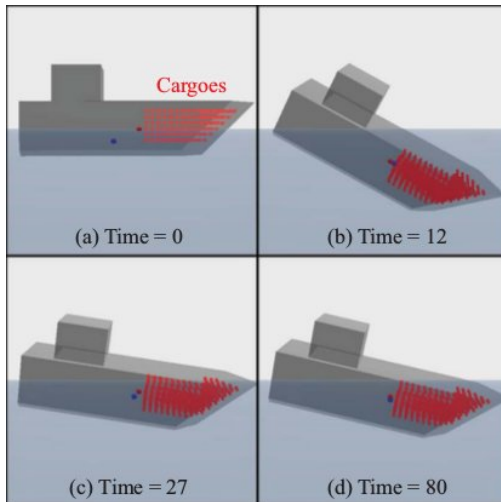
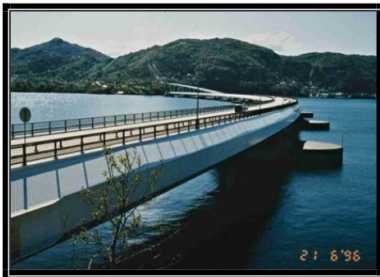


Fig. 11. (a)-(d) Snapshots of the wave-induced motions, (e) the wave height at G and the magnitudes motion at each time step.

Exemplos



■ Estruturas



*Fig. 4 Nordhordland Floating Bridge,
Norway*



*Fig. 5 West India Quay Footbridge,
United Kingdom*

Exemplos



Fig. 9. Shirashima Floating Oil Storage Base, Japan (Photo courtesy of Shirashima Oil Storage Co Ltd)



Fig. 10 Kamigoto Floating Oil Storage Base, Nagasaki Prefecture, Japan



*Fig. 13 Concept Design of a Clean Energy Plant
by Floating Structure Association of Japan*



Fig. 15 Mega-Float in Tokyo Bay, Japan (Photo courtesy of SRCJ)



Fig. 16 Proposed Floating Runway at Tokyo International Airport (Haneda)

Exemplos

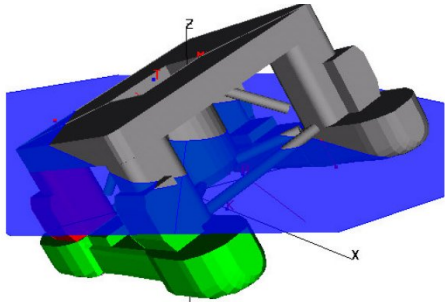


Figure 26- Sstab evaluation of flooding using measured drafts.

Como flutuam os corpos?

- Equilíbrio dinâmico entre:
 - Peso próprio
 - Forças exercidas pelo líquido
 - Forças exercidas pela atmosfera (vento)
 - Forças externas (âncoras,...)

$$M \frac{d^2 \vec{c}}{dt^2} = \sum \vec{F}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{T}$$

onde $\vec{c}$ é a posição do centro de massa, $\vec{F}$ força, $\vec{L}$ momento angular e $\vec{T}$ torque (ambos respeito de $\vec{c}$).

- O corpo *deforma* pelas forças aplicadas.
- Os fluidos *respondem* à presença do corpo.

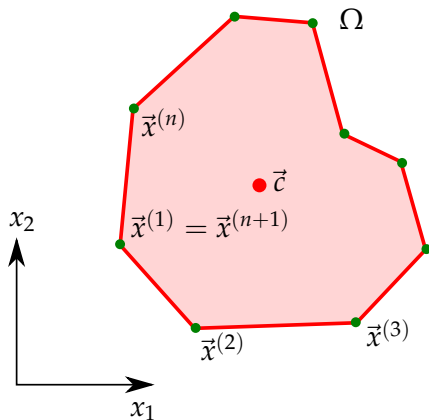
Descrição geométrica do corpo

- Existem diversas maneiras: Primitivas, interpolatórias com/sem malha, etc.
- Consideraremos a seguinte:
 - A superfície $\mathcal{S}$ do corpo é a união disjunta de um conjunto de patches, cada um deles sendo a imagem de um símlice M por uma transformação $\vec{\phi} : M \rightarrow \mathbb{R}^d$.

$$\mathcal{S} = \cup_K \vec{\phi}_K(M)$$

- A geometria de cada patch é definida por um conjunto de nós.

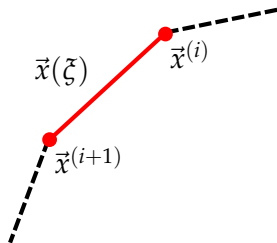
Representação linear por partes em 2D



Lista de pontos:

$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$
$x_1^{(2)}$	$x_2^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$
$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$
$x_1^{(n+1)}$	$x_2^{(n+1)}$

Representação linear por partes em 2D

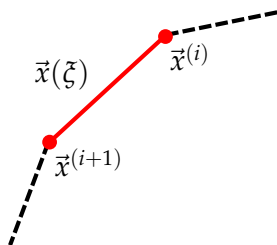


$$\vec{x}(\xi) = \vec{\varphi}_{K=i}(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \vec{x}^{(i)} + \frac{1+\xi}{2} \vec{x}^{(i+1)},$$

$$\xi \in M = [-1, 1]$$

A imagem de $\vec{\varphi}_i$ é o segmento reto de $\vec{x}^{(i)}$ a $\vec{x}^{(i+1)}$.

Representação linear por partes em 2D



- Cálculo do Jacobiano (comprimento de arco):

$$ds = |d\vec{x}| = \left\| \frac{d\vec{x}}{d\xi} \right\| d\xi = \left\| \frac{\vec{x}^{(i+1)} - \vec{x}^{(i)}}{2} \right\| d\xi$$

- Cálculo da normal (anti-horária):

$$\vec{d} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{x}^{(i+1)} - \vec{x}^{(i)}, \quad \vec{n} = \frac{(d_2, -d_1)}{\|\vec{d}\|}$$

Ambos constantes em cada patch.

Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^d$, então

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} f(\vec{x}) \, d\mathcal{S} &= \sum_K \int_{\vec{\varphi}_K(M)} f(\vec{x}) \, d\mathcal{S} \\ &= \sum_K \int_M f(\underbrace{\vec{\varphi}_K(\vec{\xi})}_{\vec{x}(\vec{\xi})}) \underbrace{\frac{d\mathcal{S}}{dM}}_{\text{Jacobiano de } \vec{\varphi}_K} \, dM.\end{aligned}$$

- A integral de curva/superfície transformou-se numa soma de integrais sobre um único símplice M .
- Em 1D, certamente escolhemos $M = [-1, 1]$.

- Dados três pontos arbitrários em 3D, com coordenadas $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ e $\vec{x}^{(3)}$, determinar uma transformação $\vec{\varphi} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ que transforme o triângulo unitário M (com vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$) no triângulo plano definido pelos três pontos.
- Quanto vale o Jacobiano dessa transformação?

Integração em $\mathcal{S}$, caso 1D

Nos cálculos, vão aparecer **muitas** integrais da forma

$$\int_{\mathcal{S}} f(\vec{x}) \, ds = \sum_K \int_{-1}^1 \underbrace{f(\vec{\phi}_K(\xi))}_{g(\xi)} \frac{ds}{d\xi} \, d\xi .$$

Quadratura de Gauss-Legendre

Existe uma quadratura

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \simeq \sum_{k=1}^N A_k g(\xi_k)$$

que integra exatamente polinômios de grau $2N - 1$. Se esperamos que a função a integrar seja aproximável por um polinômio desse grau, escolhemos:

$N = 2$	$N = 3$
$\xi_1 = -1/\sqrt{3} \quad A_1 = 1$	$\xi_1 = -\sqrt{3/5} \quad A_1 = 5/9$
$\xi_2 = 1/\sqrt{3} \quad A_2 = 1$	$\xi_2 = 0 \quad A_2 = 8/9$
	$\xi_3 = \sqrt{3/5} \quad A_3 = 5/9$

Integração em $\mathcal{S}$, numérica

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} f(\vec{x}) \, ds &= \sum_K \int_{-1}^1 \underbrace{f(\vec{\varphi}_K(\xi))}_{g(\xi)} \frac{ds}{d\xi} \, d\xi . \\ &\simeq \sum_K \sum_{k=1}^N A_k \underbrace{f(\vec{\varphi}_K(\xi_k))}_{f(\vec{x}_k)} \frac{ds}{d\xi}\end{aligned}$$

A seguir, alguns exemplos de cálculos de integrais sobre superfícies “numéricas”.

Cálculo do volume (2D) encerrado em $\mathcal{S}$

$$\begin{aligned} V &= \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \operatorname{div} \vec{x} \, dx \, dy \\ &= \oint_{\mathcal{S}} \frac{1}{2} \vec{x} \cdot \vec{n} \, ds \\ &= \sum_K \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{2} \vec{x}_k \cdot \vec{n}_k \frac{ds}{d\zeta}(\zeta_k) \end{aligned}$$

Indeed, if the geometrical interpolation is $\mathbb{P}_1$, then for each K we have that $\vec{x}(\zeta)$ is $\mathbb{P}_1$ while $\vec{n}$ and $ds/d\zeta$ are constant in each segment (in fact, $ds/d\zeta = \ell_K/2$).

The integrand is thus $\mathbb{P}_1$, so that $N = 1$ suffices to compute the volume to roundoff error.

Cálculo do centro de massa de um polígono homogêneo

$$\begin{aligned}
 \vec{c} &= \frac{1}{3V} \begin{bmatrix} \oint_{\partial\Omega} (\vec{x} \cdot \vec{n}) x_1 ds \\ \oint_{\partial\Omega} (\vec{x} \cdot \vec{n}) x_2 ds \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{3V} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 (\vec{x}(\xi) \cdot \vec{n}^{(i)}) x_1(\xi) \frac{\ell_i}{2} d\xi \\ \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 (\vec{x}(\xi) \cdot \vec{n}^{(i)}) x_2(\xi) \frac{\ell_i}{2} d\xi \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{3V} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N A_k \vec{x}_k \cdot \vec{n}^{(i)} x_{1k} \frac{\ell_i}{2} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N A_k \vec{x}_k \cdot \vec{n}^{(i)} x_{2k} \frac{\ell_i}{2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Cálculo do empuxo hidrostático

- A força de pressão por unidade de área que um meio fluido faz sobre um corpo que ocupa um domínio Ω é dada por

$$\vec{f}_p = -p, \vec{n}.$$

A força total é obtida por integração em S ,

$$\vec{F}_p = \int_S -p \vec{n} dS.$$

- Se o fluido está imóvel (estático), a única força é a de pressão. Se não, devem ser consideradas também as forças *viscosas*.

- Considerando a superfície livre do fluido num instante t como sendo

$$x_2 = Z(t, x_1) , \quad (x_3 = Z(t, x_1, x_2) \text{ em 3D}),$$

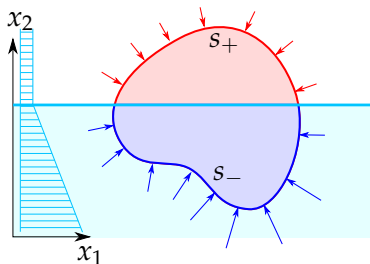
a aproximação de pressão hidrostática é

$$p(t, x_1, x_2) = p_{atm}(t, x_1) + \rho_L g \max(0, Z(t, x_1) - x_2)$$

- Em geral se toma p_{atm} independente de $\vec{x}$.
- Caso estático: $Z(t, x_1) = \text{constante}$.
- Enchimento/esvaziamento quaseestático: $Z(t, x_1) = h(t)$.
- Onda de celeridade v :

$$Z(t, x_1) = h(x - vt) , \quad \text{e.g.;} \quad Z(t, x_1) = h_0 + a \sin(k(x_1 - vt)) .$$

Caso estático



$$\vec{F}_A = \int_{S_+} -p_{atm} \vec{n} \, ds = -p_{atm} \int_{S_+} \vec{n} \, ds$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= \int_{S_-} -p(\vec{x}) \vec{n} \, ds \\ &= \int_{S_-} -[p_{atm} + \rho_L g(z - x_2)] \vec{n} \, ds \\ &= -p_{atm} \int_{S_-} \vec{n} \, ds - \rho_L g \int_{S_-} (z - x_2) \vec{n} \, ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_A + \vec{F}_L = -p_{atm} \int_{S_+} \vec{n} \, ds - p_{atm} \int_{S_-} \vec{n} \, ds - \rho_L g \int_{S_-} (z - x_2) \vec{n} \, ds \\ &= -p_{atm} \oint_{S_+ \cup S_-} \vec{n} \, ds - \rho_L g \int_{S_-} (z - x_2) \vec{n} \, ds \end{aligned}$$

0

- Como p_{atm} não tem influência no balanço de forças, pode-se definir $p_{atm} = 0$.
- *Princípio de Arquimedes*: No caso estático o empuxo é igual ao peso do líquido deslocado, e de sentido contrário.
- Se Z ou p_{atm} dependem de x_1 , o empuxo tem componente horizontal.

- Programe uma função que, a partir da matriz de coordenadas coor de um polígono e da função $Z(t, x_1)$, calcule o empuxo do líquido sobre o corpo.
- Grafique as componentes horizontal e vertical do empuxo como função do tempo.
- Considere $Z(t, x_1) = t$, e outra função que represente uma onda que passa pela posição do corpo.

A partir dos conceitos desenvolvidos, uma formulação razoável seria:

- Seja x_j^i a componente j do vetor de coordenadas do nó i , com $i = 1, \dots, N$. Isto poderia ser uma matriz `coor(1:n, 1:2)` em que cada linha é o vetor (linha) posição de um nó. Por exemplo,

```
n=4; coor=[0 0;1 0;1 2;0 2];
```

```
coor=[coor;[coor(1,:)]];
```

constroi o retângulo $(0,1) \times (0,2)$

- A regra de quadratura poderia ser

$N=3$; $\mathbf{x}_i = [-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}]$; $\mathbf{A} = [5/9, 8/9, 5/9]$;

- Pesos interpolatórios $(1 - \xi)/2$ e $(1 + \xi)/2$:

$\mathbf{pint} = [(1-x_i)/2; (1+x_i)/2]$;

- Imagens dos pontos de quadratura no segmento ("patch") i

for $k=1:N$

$\mathbf{x}(1,k) = \mathbf{pint}(1,k) * \mathbf{coor}(i,1) + \mathbf{pint}(2,k) * \mathbf{coor}(i+1,1)$;

$\mathbf{x}(2,k) = \mathbf{pint}(1,k) * \mathbf{coor}(i,2) + \mathbf{pint}(2,k) * \mathbf{coor}(i+1,2)$;

endfor

- Os Jacobianos e vetores normais:

$\mathbf{d} = [\mathbf{coor}(2:n+1,:) - \mathbf{coor}(1:n,:)]$; $ll = \text{norm}(\mathbf{d}, "rows")$; $\mathbf{jac} = ll/2$;

$\mathbf{normal} = [\mathbf{d}(:,2) ./ ll, -\mathbf{d}(:,1) ./ ll]$

■ Integral da função $f = 1$ (perímetro):

```
perim=0;
for i=1:n
    perim=perim+A*ones(N,1)*jac(i);
endfor
```

■ Integral de função arbitrária:

```
f=@(x) x(1)*x(2);
res=0;
for i=1:n
    for k=1:N
        x=pint(1,k)*coor(i,:)'+pint(2,k)*coor(i+1,:);
        res=res+A(k)*f(x)*jac(i);
    endfor
endfor
```

■ Integral da normal (= 0):

```
res=[0;0];  
for i=1:n  
    for k=1:N  
        res=res+A(k)*normal(i,:)'*jac(i);  
    endfor  
endfor
```

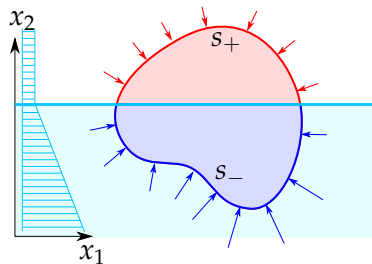
■ Integral de $\frac{1}{2}\vec{x} \cdot \vec{n}$ (=volume):

```
res=0;  
for i=1:n  
    for k=1:N  
        x=pint(1,k)*coor(i,:)'+pint(2,k)*coor(i+1,:)';  
        res=res+A(k)*1/2*normal(i,1:2)*x*jac(i);  
    endfor  
endfor
```

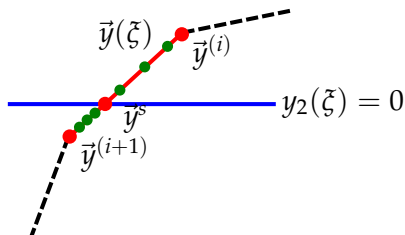
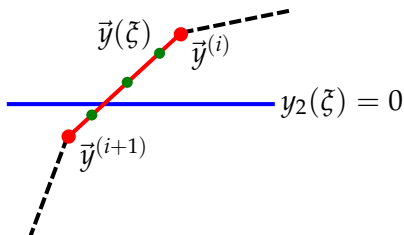
■ Empuxo:

```
Z=@(t,x1) 1.5;  
p=@(t,x) max(0,Z(t,x(1))-x(2));  
t=0;  
res=[0;0];  
for i=1:n  
    for k=1:N  
        x=pint(1,k)*coor(i,:)'+pint(2,k)*coor(i+1,:);  
        res=res+A(k)*normal(i,1:2)'*(-p(t,x))*jac(i);  
    endfor  
endfor
```

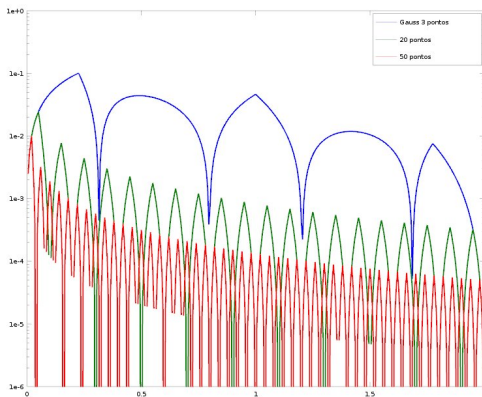
Erros de integração



- A função $p(t, \vec{x})$ **não é um polinômio** ao longo das arestas cortadas pela superfície livre. Isto, no caso de corpos com arestas muito compridas, requer uma integração especial.



- Consideremos o quadrilátero definido pelos pontos $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,2)$ e $(0,2)$. Seu empuxo (Arquimedes) é, em função da altura da água, $E(z) = \rho g z (1 + z/2)$.
- Na figura se compara o **erro relativo** de usar quadratura de Gauss de 3 pontos, com o de quadraturas de 20 e 50 pontos.



Cálculo do torque de pressão

- O **torque** é a quantidade que governa as rotações, assim como a **força** governa as translações.
- É uma quantidade **vetorial** (pseudo), mas em 2D é escalar.

$$\vec{T}_P = \int_S (\vec{x} - \vec{c}) \times (-p(\vec{x}) \vec{n}) dS$$

- O torque é medido **respeito de um centro de rotação**, nesse caso $\vec{c}$.
- Quando o centro de rotação coincide com o centro de massa, a dinâmica rotacional é dada por $I \omega'(t) = T$.

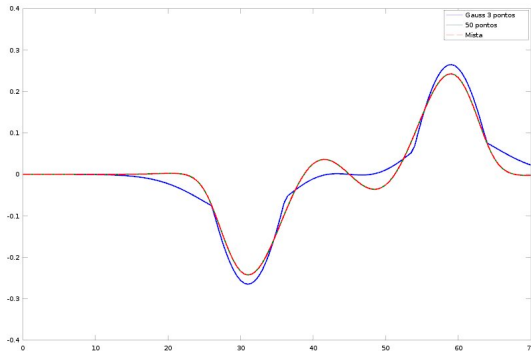
■ Torque:

```
Z=@(t,x1) 1.+exp(-(x1-0.1*t+3)^2/0.16);  
p=@(t,x) max(0,Z(t,x(1))-x(2));  
t=0; res=0;  
for i=1:n  
    for k=1:N  
        x=pint(1,k)*coor(i,:)'+pint(2,k)*coor(i+1,:);  
        ff=(x(1)-cg(1))*normal(i,2)-(x(2)-cg(2))*normal(i,1);  
        res=res+A(k)*ff*(-p(t,x))*jac(i);  
    endfor  
endfor
```

Erro de integração

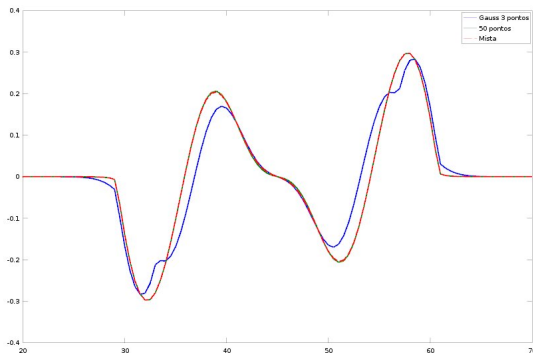
- Consideremos o quadrilátero definido pelos pontos $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,2)$ e $(0,2)$. Calculamos o torque respeito de $\vec{c}$ quando passa a onda

$$Z(t, x_1) = 1 + \exp \left(- (x_1 + 3 - 0.1 t)^2 \right) .$$



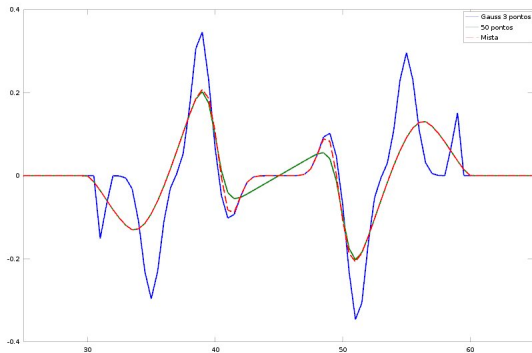
Onda mais ingreme,

$$Z(t, x_1) = 1 + \exp \left(- \frac{(x_1 + 3 - 0.1 t)^2}{0.4^2} \right) .$$



Onda ainda mais ingreme,

$$Z(t, x_1) = 1 + \exp \left(- \frac{(x_1 + 3 - 0.1 t)^2}{0.1^2} \right) .$$



O método misto também dá resultado errado, porque a integração de 3 pontos não consegue capturar a onda.

Complementemos vendo o empuxo para essa última onda.

