SME0206 - BMACC - 13/06/2018

Nome:

No. USP:

Prova 5: Solução numérica de EDOs

Lembrete: Como lembrete de programação, a função pêndulo embaixo resolve pelo método de Euler explícito a equação do pêndulo $\theta'' = -\omega^2 \sin\theta$ pelo método de Euler explícito.

```
function [y time]=pendulo(y0,t0,dt,nt)
ome=1.;
time(1)=t0;
y(:,1)=y0;
for n=1:nt
 y(1,n+1)=y(1,n)+dt*y(2,n);
 y(2,n+1)=y(2,n)-dt*ome*ome*sin(y(1,n));
 time(n+1)=time(n)+dt;
endfor
```

As definições dos métodos são:
Euler explícito:

$$y^{n+1} = y^n + \delta t\, f(t_n, y^n)$$

Euler implícito:

$$y^{n+1} = y^n + \delta t\, f(t_{n+1}, y^{n+1})$$

Trapezoidal implícito:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\delta t}{2}\left(f(t_n, y^n) + f(t_{n+1}, y^{n+1})\right)$$

RK2 trapezoidal explícito:

$$y^{n+1} = y^n + \delta t\,(c_1 k_1 + c_2 k_2)$$

onde $k_1 = f(t_n, y_n)$, $k_2 = f(t_n + \delta t, y^n + \delta t\, k_1)$, $c_1 = c_2 = 1/2$.
RK2 Euler melhorado:

$$y^{n+1} = y^n + \delta t\,(c_1 k_1 + c_2 k_2)$$

onde $k_1 = f(t_n, y_n)$, $k_2 = f(t_n + \frac{\delta t}{2}, y^n + \frac{\delta t}{2}\, k_1)$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$.
Adams-Bashforth de 2 passos:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\delta t}{2}\left[3f(t_n, y^n) - f(t_{n-1}, y^{n-1})\right] .$$

Adams-Bashforth de 3 passos:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\delta t}{12}\left[23f(t_n, y^n) - 16f(t_{n-1}, y^{n-1}) + 5f(t_{n-2}, y^{n-2})\right] .$$

BDF de 2 passos:

$$y^{n+1} = \frac{4}{3}y^n - \frac{1}{3}y^{n-1} + \frac{2\delta t}{3} f(t_{n+1}, y^{n+1}) .$$

1. (**3 pontos**) Modifique o código `pendulo.m` para que resolva o mesmo problema pelo método de Euler implícito.

2. (**2+2 pontos**) Determine se o método de Adams-Bashforth de dois passos é zero-estável. Isto é, para o problema $y' = -\lambda y$ ($\lambda > 0$) determine se Y^n tende para zero quando δt é suficientemente pequeno. Não precisa fazer todas as contas, mas sim explicar como responder se Y^n tende a zero ou não para cada valor de δt.

Em particular, coloque **verdadeiro** ou **falso** nas afirmações seguintes, segundo corresponda:

(a) $\delta t = 3/\lambda \;\Rightarrow\; Y^n \to 0.$

(b) $\delta t = 3/(2\lambda) \;\Rightarrow\; Y^n \to 0.$

(c) $\delta t = 2/\lambda \;\Rightarrow\; Y^n \to 0.$

(d) $\delta t = 1/(2\lambda) \;\Rightarrow\; Y^n \to 0.$

3. (**2+1 pontos**) Considere um método cujo erro de truncamento é

$$T_n = \frac{3\,y(t_n) - 4\,y(t_{n-1}) + y(t_{n-2})}{2\,\delta t} - f(t_n, y(t_n)) \;.$$

Calcule a ordem de consistência desse método:

Esse erro de truncamento corresponde a qual dos métodos listados na primeira página da prova?

Boa prova!