SME0206 - BMACC - 16/05/2018

Nome:

No. USP:

Prova 4: Integração e diferenciação numéricas

---

1. (**2+3 pontos**) Em coordenadas polares, a área interior a uma curva $r(\theta)$ é

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta)\ d\theta\ .$$

Uma máquina fabrica peças cuja forma não é exatamente circular senão um pouco oval. De fato, as formas produzidas satisfazem a equação

$$r(\theta) = \sqrt{\alpha + \beta\ \cos^2(\theta)}\ ,$$

onde α e β são constantes. Essas constantes são de fato não negativas, já que o ângulo é medido a partir do ângulo de maior raio e portanto $\alpha = r_{\min}^2$ e $\alpha + \beta = r_{\max}^2$. Se pede:

(a) Os pesos w_1 e w_2 para que a regra

$$A \simeq r^2(0)\, w_1 + r^2(\pi)\, w_2$$

integre exatamente todas as formas possíveis;

$w_1 =$ $w_2 =$

(b) Uma regra **de um ponto** que seja exata.

$\theta_1 =$ $w_1 =$

2. (**2+2+2 pontos**) Seja a regra de diferenciação numérica, para pontos $\{x_i\}$ equiespaçados a distância h,

$$f'(x_j) \simeq \tilde{L}(x,y) = \frac{-3y_{j-2} - y_{j-1} + y_j + 3y_{j+1}}{10\, h}\ .$$

Cada avaliação da função $y_i = f(x_i) + \epsilon$ tem um ruído ϵ que tem distribuição $N(0,\sigma)$ (normal de média $\langle\epsilon\rangle = 0$, variança $\langle\epsilon^2\rangle = \sigma^2$). Os ruídos de duas avaliações y_i e y_j, se $j \neq i$, são independentes.
Se sabe que o erro da fórmula é da forma

$$f'(x_j) - \tilde{L}(x,y) = C\, h\, f''(\xi) + \gamma\, \frac{\epsilon}{h}\ ,$$

com $\xi \to x_j$ quando $h \to 0$. Quanto valem C e γ? Se a função amostrada é $\sin \omega t$, com um ruído de $\sigma = 0.01$, qual seria o número N de amostras equiespaçadas por período que minimizaria o erro?

$C =$ $\gamma =$ $N =$

Boa prova!