SME0206 - BMACC - 21/03/2018

Nome:

No. USP:

Prova 1: Sistemas não lineares, otimização

Lembrete:
Teorema: Seja A uma matriz simétrica definida positiva $m \times m$ e seja $b \in \mathbb{R}^m$. Então, sendo

$$F(x) = (1/2)\, x^T A\, x \; - \; x^T b$$

se cumpre $\nabla F(x) = A\, x \; - \; b$ e o único x^* que minimiza F é a solução do sistema linear

$$A\, x \; = \; b \; .$$

Teorema: Definindo

$$F(x) = (1/2)\, x^T A x - x^T b$$

e $r(x) = Ax - b$, de todos os pontos da forma $y = x^{(k)} + \beta_k\, d^{(k)}$, qualquer que seja a escolha de $d^{(k)}$, o valor de β_k que minimiza $F(y)$ é

$$\beta_k = -\frac{d^{(k)^T}\, r(x^{(k)})}{d^{(k)^T}\, A\, d^{(k)}} \; .$$

Lembrete: O método de Richardson para resolver $f(x) = 0$ é dado por

$$x^{k+1} = x^k - \beta\, f(x^k) \; ,$$

e o método de Newton por

$$x^{k+1} = x^k - [Df(x^k)]^{-1}\, f(x^k) \; .$$

O método de Newton é implementado em Octave como

```
k=1; x=x0; err=1e+10;
while ((k<=kmax) && (err > tol))
 f  = ..............;
 B  = ..............;
 dx = -B\f;
 err = ..............;
 x = x + dx;
 k = k + 1;
endwhile
```

onde `f` e `B` correspondem à função cujo zero se quer determinar e à sua matriz Jacobiana, respectivamente. O código faltante depois de `err` depende do critério de parada desejado.

---

1. **(3 pontos)** Responder com **V**erdadeiro ou **F**also à esquerda:

   (a) O método da bisecção, se $f(a)f(b) < 0$, converge se e só se a função f é contínua e diferenciável em $[a, b]$.

   (b) A iteração de ponto fixo $x^{k+1} = g(x^k)$, com g diferenciável, converge ao ponto fixo x^* mais rapidamente quanto menor seja $\|Dg(x^*)\|$.

   (c) As iterações de Newton, com f diferenciável, convergem ao zero x^* mais rapidamente quanto menor seja $\|Df(x^*)\|$.

   (d) Se a função f é quadrática, então as iterações de Newton para determinar a raiz x^* convergem em apenas 1 (uma) iteração.

   (e) Se a função F é linear, então as iterações de Newton para determinar o mínimo $x^* = \arg\min_x F(x)$ convergem em apenas 1 (uma) iteração.

   (f) Seja $\ell(t) = F(x^k + t\, d^k)$, onde F é de classe C^2 e D^2F é uniformemente definida positiva. Se $\ell(t^*) \leq \ell(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $\nabla F(x^k + t^* d^k) = 0$.

---

2. (**4 pontos**) Seja o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 2\cos\theta + \cos(\theta + \phi) &= \sqrt{2} \\ 2\sin\theta + \sin(\theta + \phi) &= 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Determinar o resultado (θ^1, ϕ^1) de fazer **uma** iteração do método de **Newton** a partir do ponto inicial $(\theta^0, \phi^0) = (0, \pi/2)$.

$\theta^1 \quad =$

$\phi^1 \quad =$

3. (**4 pontos**) Escrever as expressões em Octave para `f`, `B` e `err`, de tal maneira que o método de Newton determine o ponto $x^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ no qual a distância da superfície definida por

$$x_3 = \varphi(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - 2x_2^4$$

ao ponto $(1, 2, 3)$ é mínima. Use o critério de parada "teste do resíduo".

Escrever a resposta no verso!

Boa prova!