Notas de clase

MECÁNICA DE FLUIDOS

Gustavo C. Buscaglia

Instituto Balseiro
Comisión Nacional de Energía Atómica
Universidad Nacional de Cuyo

Agosto–Diciembre 2004

Índice general

1. Introducción	2
1.1. Los fluidos y su discutible carácter de medios continuos	2
1.2. Mecánica del continuo	5
1.3. Cinemática del continuo	6
1.4. Líneas de la mecánica de fluidos	7
1.4.1. Líneas de corriente	7
1.4.2. Líneas de humo	7
1.5. Definición de fluido	7
1.6. Interfaces, su energía, la tensión superficial	8
1.7. Diversas ramas de la mecánica de fluidos	8
2. Hidrostática	10
2.1. Distribución de presiones en hidrostática	10
2.1.1. Presiones en la atmósfera	10
2.2. Cálculo de fuerzas hidrostáticas sobre superficies	11
2.2.1. Superficies planas	12
2.2.2. Cálculo standard de fuerzas en superficies planas	13
2.2.3. Superficies curvas	13
2.2.4. Caso de sistemas no inerciales	13
2.3. Hidrostática de fluidos estratificados	13
2.4. Flotación y estabilidad	14
2.5. Fórmulas	14
3. Ecuaciones fundamentales	15
3.1. Derivadas de integrales sobre dominios móviles	15
3.2. Conservación de la masa	16
3.2.1. La ecuación general	16
3.2.2. Balance detallado	17
3.3. Conservación de la cantidad de movimiento	17
3.4. La ecuación de Bernoulli	19
3.4.1. Flujo estacionario: Líneas de corriente	20
3.4.2. Flujo estacionario: Líneas de vorticidad	21
3.4.3. Flujo irrotacional	21
3.4.4. Alturas de columna de líquido	21
3.5. Conservación de la energía	21

4. Relaciones integrales	24
4.1. Relación básica y aplicaciones	24
4.1.1. Conservación de la masa	24
4.1.2. Conservación de la cantidad de movimiento	25
4.1.3. Conservación del momento angular	26
4.1.4. Conservación de la energía	26
4.1.5. Aplicación a dispositivos	27
5. Flujo viscoso en conductos	31
6. Análisis dimensional y semejanza	32
6.1. La homogeneidad dimensional	32
6.2. El teorema Π de Buckingham	34
6.3. Algunos números adimensionales frecuentes	34
6.4. Adimensionalización de las ecuaciones de Navier-Stokes	35
6.5. Las escalas de Kolmogorov	35
6.6. Adimensionalización de las condiciones de contorno	35
6.7. El número de Rossby	35
7. Turbomáquinas	36
7.1. Bombas de desplazamiento positivo	36
7.2. Bombas dinámicas	36
7.3. Curvas adimensionales	37
7.4. Turbinas	38
7.4.1. Números adimensionales y selección de turbinas	38
7.4.2. Turbinas de impulso	38
8. Flujo irrotacional	39
8.1. Flujos potenciales	39
8.2. Cinemática y dinámica de la vorticidad	41
8.2.1. Ecuación de la vorticidad	41
8.2.2. Teorema de circulación de Kelvin	41
8.2.3. Generación de vorticidad	42
8.2.4. Consecuencias en cuanto a la existencia de flujos irrotacionales	43
8.3. Flujos irrotacionales ejemplo	43
8.3.1. Corriente uniforme	43
8.3.2. Fuente-sumidero	43
8.3.3. Vórtice irrotacional	44
8.3.4. Cuerpo semi-infinito de Rankine	44
8.3.5. Cilindro sin circulación	44
8.4. Drag, drag, drag	45
8.4.1. Coeficiente de drag	45
8.4.2. Coeficientes de drag de algunas formas	45
8.5. Algunos flujos irrotacionales ejemplo adicionales	46
8.5.1. Cilindro con circulación	46
8.5.2. Ondas de gravedad	46

9. Flujo en la capa límite y otros flujos relacionados	49
9.1. Soluciones exactas laminares	49
9.1.1. Flujo paralelo entre placas planas	49
9.1.2. Primer problema de Stokes	49
9.1.3. Segundo problema de Stokes	50
9.1.4. La aproximación de capa límite	50
9.1.5. Solución exacta para una placa plana en flujo laminar	51
9.1.6. Espesores de capa límite y ecuación integral de von Karman	52

Capítulo 1

Introducción

1.1. Los fluidos y su discutible carácter de medios continuos

Los fluidos se tratan generalmente desde la *aproximación del continuo*. Olvidamos las partículas discretas y hablamos de volúmenes elementales ΔV_e de materia que son *suficientemente grandes* como para que las fluctuaciones estadísticas sean irrelevantes, y *suficientemente pequeños* como para ser considerado un punto en su tratamiento matemático.

La definición de la **densidad** es directa.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_e} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (1.1.1)$$

Aire: $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$. Agua: $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$.

El número de moléculas en una esfera de aire de diámetro 1 micron en atmósfera standard es 14×10^6 . Si la misma esfera es de agua tendremos 17×10^9 . Como vemos, tanto en gases en condiciones normales como en líquidos podemos encontrar, en la mayoría de las aplicaciones, este volumen ΔV_e que sea mucho menor que los tamaños característicos del problema pero contenga suficientes moléculas como para que las fluctuaciones estadísticas sean despreciables (comparadas por ejemplo con los errores de medición).

En la mecánica de sólidos, una vez identificados estos **puntos materiales** o **partículas materiales** se pasa a estudiar su *movimiento*. Se define para esto una función ϕ tal que $\phi(x, t)$ es la posición, al instante t , de la partícula material que en cierta configuración de referencia (por ejemplo, a $t = 0$) ocupaba la posición x . Este concepto, y su misma *definición*, involucran la preservación de la *identidad material* durante el movimiento.

Se cumplirá esta preservación de identidad en el caso de un gas? Recordemos que los gases son conjuntos de moléculas de un diámetro efectivo (en condiciones standard) de $d \simeq 3.7 \times 10^{-10} \text{ m}$ y con un espaciado medio de $\delta \simeq 3.3 \times 10^{-9} \text{ m}$. Estas moléculas, por ser $\delta \gg d$, chocan fundamentalmente de a pares (colisiones binarias), y

el **camino libre medio** entre colisiones puede estimarse como

$$\lambda = \left(2^{\frac{1}{2}}\pi d^2 n\right)^{-1} \quad (1.1.2)$$

donde n es la densidad molecular ($\delta \simeq n^{-\frac{1}{3}}$). Notar que n cumple, para gases perfectos,

$$p = nk_B T \quad (1.1.3)$$

donde p es la presión, T la temperatura absoluta, y k_B la constante de Boltzmann ($k_B = 1.3805 \times 10^{-23}$ J/K).

Recordemos también que las moléculas de gas tienen, punto material a punto material, una *distribución* de velocidad (o energía). La distribución de equilibrio (Maxwelliana) está dada por

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \quad (1.1.4)$$

de donde resulta una velocidad cuadrática media dependiente de la temperatura según

$$\overline{v^2} = \frac{3p}{\rho} = 3\mathcal{R}T \quad (1.1.5)$$

con $\mathcal{R}$ la constante del gas, igual a $R/\mathcal{M}$, $R = 8310 \text{ m}^2/(\text{s}^2 \text{K})$ y $\mathcal{M}$ el peso de un mol.

Las relaciones anteriores, para el caso de aire en atmósfera standard, arrojan un camino libre medio $\lambda = 65$ nanómetros, con una velocidad media (rms) de 500 m/s para una distribución de moléculas que pasan aproximadamente 10^{-10} s volando entre colisiones.

En estas condiciones se comprende fácilmente que un cierto volumen material, aún en condiciones macroscópicas de reposo, va perdiendo identidad material con el tiempo. Las moléculas que lo conforman se van intercambiando con las circundantes. Una cantidad macroscópica que evidencia esto es el coeficiente de autodifusión D . Las fronteras materiales de cualquier porción de materia se van desdibujando, como si una frontera originalmente de espesor nulo fuera borroneándose. Un tiempo t después de que definimos la frontera, ya tiene un "espesor" del orden de $(Dt)^{\frac{1}{2}}$. El coeficiente de difusión del oxígeno (una de las componentes del aire) en aire es, a una atmósfera, de $D = 0.21 \times 10^{-4}$ m²/s. Esto quiere decir, grosso modo, que en un segundo las moléculas interdifundieron del orden de $\sqrt{0.21 \times 10^{-4}}$ m, es decir, 4.6 mm!!

Si nuestra partícula material en la configuración de referencia, que asociábamos al concepto matemático de *punto*, era razonablemente pequeña (digamos... algunos micrones?), un segundo después sin duda ya no lo será mas, y una hora más tarde tendrá el tamaño de una pelota de fútbol.

Desde luego, estas dificultades no se nos presentan para un sólido, en el cual la posición de las partículas materiales está bien definida... la autodifusión es realmente muy lenta. En líquidos tenemos una situación intermedia entre el gas y el sólido. Hay autodifusión de partículas, pero las distancias recorridas son menores (coeficientes de difusión del orden de 10^{-9} m²/s) y puede hablarse con mayor precisión de un "volumen con identidad material" (y utilizar sin tantos cuestionamientos los conceptos de la mecánica de los sólidos, como las trayectorias $\phi(x, t)$).

Observamos así, en esta primera sección preliminar, algunas dificultades conceptuales que debemos al menos discutir:

1. **Los puntos materiales deben tener, como mínimo, el tamaño necesario para albergar una cantidad estadísticamente significativa de moléculas.** En un gas (atmósfera standard) este tamaño puede ser de unos 100-1000 nanómetros, grosso modo, y de 10 veces menos que esto en un líquido. Esto no genera ninguna dificultad si estamos analizando una bomba centrífuga cuyo diámetro de rodetes es de 20 cm, desde luego. Pero... los cabezales lectores de los discos duros de nuestras PC's, que levitan sobre el disco apoyándose en el colchón de aire que se desarrolla entre el cabezal y el disco, vuelan hoy en día a apenas 10 nanómetros de altura. Y es un problema de mecánica de fluidos sin duda alguna! Debe abandonarse completamente la aproximación del continuo en este caso? Y qué ocurre con los MEMS (Sistemas Micro-Electro-Mecánicos)? También es preciso abandonar la aproximación del continuo para analizar una micro-tobera con pocos micrones de diámetro de garganta utilizada a baja presión? o un cojinete de una micro-turbina de gas? Este es un punto interesante además porque los formalismos de "promediado de ensemble", "promediado espacial", etc, que de él surgen son los mismos que se utilizan en flujos multifásicos. Considerar un "medio continuo equivalente" es, por ejemplo, lo que hace el *modelo multifluido euleriano*.
2. Cómo conciliar las técnicas de la mecánica del continuo abstracta, y de la mecánica del sólido, que se basan en los conceptos de posición, trayectoria, etc., con el mezclado intrínseco de los fluidos? La realidad es que este punto hace *filosóficamente* más correcta la descripción llamada Euleriana de los fluidos (para quienes la identidad material de las "partículas" es evanescente) por sobre la Lagrangiana. Una vez que, como veremos en seguida, tenemos bien definida la velocidad del fluidos en un dado punto del espacio e instante de tiempo, a partir de ese campo de velocidades *por integración temporal* podemos reconstruir $\phi(x, t)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) = \mathbf{u}(\phi(x, t), t), \quad \phi(x, 0) = x \quad (1.1.6)$$

el mapeo ϕ así construido cumplirá todos los requisitos de la mecánica del continuo, aunque su interpretación como familia de trayectorias de partículas hace que esas "partículas" matemáticas sean bastante abstractas.

Terminemos entonces esta sección definiendo formalmente la velocidad de un fluido (aunque nótese que todavía no hemos definido fluido), pensando en general en que éste es un gas:

Dada una superficie S fija en el espacio, podemos calcular (medir) el flujo J_i por componente que la atraviesa por unidad de tiempo, i.e., el número de moléculas de cada componente (si es una mezcla como el aire, por ejemplo), que la atraviesa, promediada en una ventana temporal adecuada o en un ensemble de realizaciones.

El flujo másico total será

$$\dot{m}_S = \sum_i M_i J_i$$

donde M_i es el peso molecular de la componente i .

La expresión usual $\dot{m}_S = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_S$ puede considerarse entonces como la definición de la **velocidad** del medio continuo. Con esta definición se cumple que

$$\mathbf{u} = \frac{\sum_i M_i \mathbf{u}_i}{\sum_i M_i}$$

Paréntesis: Se suele definir el **número de Knudsen**

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \quad (1.1.7)$$

y considerar los siguientes regímenes:

- $Kn < 0.01 \rightarrow$ Continuo (Navier-Stokes, no-slip).
- $0.01 < Kn < 0.1 \rightarrow$ Slip flow (NS + slip BC).
- $0.1 < Kn < 10 \rightarrow$ Transitional flow.
- $Kn > 10$ Free molecular flow.

Las condiciones de slip (de primer orden) ya fueron propuestas por Maxwell en 1879.

$$u_s - u_w = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \lambda \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_s \quad (1.1.8)$$

puede verse que, aún si la velocidad cercana a la pared varía tanto como 1 m/s en 10 micrones de espacio ($\partial u / \partial n = 10^5 \text{ s}^{-1}$, la diferencia entre la velocidad de la pared u_w y la velocidad del gas inmediato a la pared u_s es de apenas (tomando $\sigma_v = 1$ y atmósfera standard)

$$u_s - u_w = 65 \times 10^{-9} \text{ m} \times 10^5 \text{ s}^{-1} = 6.5 \text{ mm/s}$$

pero deben considerarse *condiciones de contorno artificiales que permiten usar las fórmulas originalmente derivadas para el régimen continuo o de bajo Knudsen*. Fenomenológicamente debe considerarse que tanto los gases como los líquidos adhieren a las superficies sólidas y a las interfaces, aunque de nuevo surja la paradoja de que un gas adhiera a la pared cuando *ninguna* de sus moléculas adhiera a ella, y todas estén continuamente rebotando según alguna ley de interacción con ella.

1.2. Mecánica del continuo

Una vez que entendemos nuestro fluido como un continuo, podemos definir su densidad, velocidad, temperatura, presión en cada punto. De la mecánica del continuo debemos recordar esencialmente la "Ley de conservación del impulso lineal" y el "Principio de acción y reacción". Es decir, las leyes de Newton.

Las consecuencias de estas leyes que nos interesan pueden resumirse en:

A) Dado un cuerpo de propiedades continuas, si lo dividimos en dos *partes* mediante una superficie S , existe un campo tensorial de rango dos σ de tal manera que, para toda S , la fuerza que hace una *parte* sobre la otra puede escribirse como

$$F = \int_S \sigma \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.2.1)$$

B) Sea S una superficie cerrada, encerrando el volumen V . Entonces el ritmo de cambio de cantidad de movimiento de las partículas materiales encerradas en S cumplen

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \mathbf{f} dV + \int_S \sigma \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.2.2)$$

donde D/Dt implica una derivación “a volumen material fijo” en lugar de “a volumen espacial fijo”, es decir que $V = V(t)$ depende del tiempo de manera tal de encerrar siempre las mismas partículas. Notar que $\mathbf{f}$ denota a las fuerzas volumétricas tales como la gravedad.

Volveremos sobre estos conceptos más adelante al deducir las ecuaciones de los fluidos.

1.3. Cinemática del continuo

Salvo en casos hidrostáticos, por lo tanto, nuestros fluidos se estarán moviendo. Llamando $\phi(x, t)$ a la **deformación** de nuestro medio continuo, que nos dice la trayectoria de la partícula (o pseudo-partícula, según discutiéramos antes) que originalmente estaba en x , el **desplazamiento**, al tiempo t , de dicha partícula no es sino $\phi(x, t) - x$.

Vemos así que, la **velocidad** $\mathbf{U}(x, t)$ al tiempo t de la partícula material que a $t = 0$ estaba en x cumple

$$\mathbf{U}(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.3.1)$$

este se conoce como **campo Lagrangiano de velocidad** y en general se utiliza en sólidos, pero no en líquidos o gases.

Por qué? La respuesta frecuente es que esto se debe a que, por las grandes deformaciones de los fluidos, $\mathbf{U}(x, t)$ puede no parecerse en nada a la velocidad medida en el punto x al tiempo t . El **campo Euleriano de velocidad** $\mathbf{u}(x, t)$ nos da, justamente, la velocidad, al tiempo t , de la partícula que *en ese momento* está en x . Como discutiéramos antes, este campo Euleriano de velocidad es, si consideramos la estructura molecular de los fluidos y en particular de los gases, un observable físico básico, mientras que en los fluidos conceptos Lagrangianos como la “posición” son en realidad secundarios. Tenemos así dos buenas razones para utilizar enfoques Eulerianos en Mecánica de Fluidos, y hagámoslo, pero no olvidemos sin embargo que matemáticamente ambos enfoques son absolutamente equivalentes.

Puesto que cada partícula, en cada instante, puede tener una única velocidad, debe cumplirse

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{u}(\phi(x, t), t) \quad (1.3.2)$$

Notar que todos los campos pueden describirse Lagrangiana- o Euleriana-mente. Las diferencias fundamentales aparecen a la hora de derivar, por eso terminamos este repaso con un ejemplo clásico y fundamental.

Ejemplo: Cálculo de la aceleración de una partícula a partir de su campo Euleriano de velocidad.

$$a_i(x, t) = \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) + \sum_{j=1}^3 u_j(x, t) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x, t) \quad (1.3.3)$$

En esta última expresión puede verse ya el operador **derivada material**, tan frecuente en esta materia:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \quad (1.3.4)$$

1.4. Líneas de la mecánica de fluidos

Aparte de las **trayectorias**, que ya hemos discutido, existen otras dos familias de líneas de gran importancia en la MF, las líneas de corriente y las líneas de humo.

1.4.1. Líneas de corriente

1.4.2. Líneas de humo

1.5. Definición de fluido

Un **fluido** es un medio continuo que no puede soportar estados no esféricos de tensión sin moverse. Estos estados no esféricos de tensión involucran siempre *tensiones de corte*, por lo cual es común definir a los fluidos como materiales que no soportan tensiones de corte sin movimiento.

De la definición anterior surge que *todo fluido*, por muy extraño que sea su comportamiento cuando se mueve, cuando está en reposo cumple que su tensión es esférica

$$\sigma = -p\mathbf{1} \quad (1.5.1)$$

Esto, a su vez, considerando el simple equilibrio estático de un volumen diferencial de fluido de densidad $\rho(x, t)$ en un campo gravitatorio $\mathbf{g}(x, t)$ hace que deba cumplirse

$$\nabla p = \rho \mathbf{g} \quad (1.5.2)$$

Notar que el producto $\rho \mathbf{g}$ es la densidad volumétrica de fuerza, que podemos llamar $\mathbf{f}$. Resulta claro que (1.5.2) sólo puede cumplirse si $\nabla \times \mathbf{f} = 0$, lo cual nos muestra que no toda distribución de fuerzas volumétricas es compatible con que el fluido esté en reposo. Sin embargo, los casos en que (1.5.2) es válida son suficientemente importantes como para constituir un capítulo en sí mismos: La **Hidrostatica**, que veremos en el capítulo próximo.

Los fluidos más simples que se pueden considerar son aquellos cuyo tensor de tensiones tiene la ley constitutiva

$$\sigma = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{1} + \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (1.5.3)$$

que se denominan **fluidos newtonianos** si λ y μ son *constantes*, denominadas coeficientes de viscosidad. Si la viscosidad no es constante el fluido se dice ya no newtoniano, aunque cumpla la ecuación anterior. Hay fluidos cuyos comportamientos reológicos son mucho más complejos que los descritos por (1.5.3). Incluso existen fenómenos de *memoria* que son compatibles con la definición de fluido que hemos dado, pero en este curso no hablaremos de ellos.

Los *fluidos incompresibles* son aquellos tales que sus flujos son todos a volumen constante, y por lo tanto cumplen

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.5.4)$$

Ningun fluido es estrictamente incompresible, pero en la mayoría de los flujos los efectos de compresibilidad no son preponderantes. Esto hace que en la mayoría de los flujos la *densidad* del fluido sea una constante, teniendo así cada fluido **dos constantes constitutivas fundamentales** desde el punto de vista mecánico: Su densidad ρ y su viscosidad μ .

Dar una tabla con muchos ejemplos de valores de estas constantes. Unidades de estas constantes.

Mostrar que de la ley constitutiva newtoniana sale que

$$\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_w$$

1.6. Interfaces, su energía, la tensión superficial

Dar una idea del concepto de tensión superficial nomás, como introducción al concepto de interfases.

1.7. Diversas ramas de la mecánica de fluidos

Hidráulica de canales, represas, y otras obras.

Turbomáquinas.

Aeronáutica. Automotriz.

Hidrodinámica naval.

Fluidodinámica de procesos químicos. Reactores. Flujos multifásicos.

Termohidráulica.

Combustión. Aerosoles.

Lubricación.

Reducción de la fricción.

Estabilidad de flujos.

Ventilación.

Meteorología.

Oceanografía. Limnología física.

Ingeniería del deporte.

Acústica.

Propulsión. Explosiones. Aplicaciones en defensa. Misilística.

Hemodinámica. Bio-fluidodinámica.

Fluidos subterráneos. Agua. Petróleo.

Fluidos reológicos, electro-reológicos, etc. Fluidos complejos.

Microfluídica.

etc etc etc

Capítulo 2

Hidrostática

2.1. Distribución de presiones en hidrostática

Ecuación.

$$\nabla p = \mathbf{f} \quad (2.1.1)$$

Muchas veces, como decíamos, $\mathbf{f} = -\rho g \mathbf{k}$, y si la densidad es constante

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.1.2)$$

Principio de los vasos comunicantes.
Utilización en manometría.

2.1.1. Presiones en la atmósfera

Qué pasa si la densidad no es constante? Si es función de x o y el rotor de $\mathbf{f}$ no es nulo y no estamos en una situación estática (el fluido abandona el reposo).

Consideremos el caso $\rho = \rho(z)$, en particular el caso en el cual esta dependencia es a través de la presión, según la ley de gases ideales. Si la temperatura es uniforme, resulta

$$p = \rho RT \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dp}{p} = - \int \frac{g}{RT} dz \quad \Rightarrow \quad p = p_0 \exp\left(-\frac{g}{RT} z\right) \quad (2.1.3)$$

Existe una distribución de temperaturas importante en el análisis de la atmósfera: Aquella en la cual es energéticamente indiferente intercambiar adiabáticamente dos volúmenes de gas de diferente altura.

Pasando un volumen de gas en condiciones p_0 y T_0 a otro punto de presión p se cumplirá

$$T = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

de donde, derivando con respecto a z y utilizando (2.1.2) resulta

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_p} \quad (2.1.4)$$

que, con $c_p = 1 \text{ kJ/kg-K}$, da $0.0098 \text{ K/m} = 9.8 \text{ K/km}$. Es decir, si la temperatura baja con la altura *menos* de 10 K/km , la atmósfera es *estable*. En una atmósfera estable intercambiar dos masas de gas a diferente altura requiere energía. Esta atmósfera indiferente tiene por presión

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{gz}{c_p}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.1.5)$$

La **atmósfera standard** publicada como referencia por el gobierno de USA en 1976 tiene el siguiente perfil de temperatura

$$\begin{cases} T = T_0 - \alpha z & 0 \leq z \leq 11\text{km} & \text{tropósfera} \\ T = T_1 & 11\text{km} \leq z \leq 20.1\text{km} & \text{estratósfera} \end{cases} \quad (2.1.6)$$

donde los valores de las constantes son $T_0 = 288 \text{ K}$, $T_1 = 218 \text{ K}$ y $\alpha = 6.5 \text{ K/km}$.

Como vemos la atmósfera standard tiene un gradiente térmico inferior a los 10 K/km , y por lo tanto según lo discutido arriba es *estable*.

Temperatura potencial. Ver Kundu.

En Stull (Boundary Layer Meteorology) definen la temperatura potencial como

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (2.1.7)$$

y dicen que a primer orden puede aproximarse como

$$\theta = T + \frac{g}{c_p}z \quad (2.1.8)$$

Resulta claro que es preciso que haya aire con temperatura *potencial* más baja sobre aire con temperatura *potencial* más alta para que haya inestabilidad. En realidad, lo requerido es que d/dz de la temperatura *potencial virtual* sea negativa, donde la temperatura virtual de una masa de aire se define como la temperatura que debería tener *aire seco* para tener la misma densidad. La humedad disuelta en el aire aumenta su temperatura virtual, mientras que las gotitas de agua suspendidas en él la bajan.

2.2. Cálculo de fuerzas hidrostáticas sobre superficies

$$\mathbf{F} = \int_S p \mathbf{n} dS \quad (2.2.1)$$

y lo único que hay que hacer es integrar. Supongamos que la densidad y la gravedad son constantes, con lo cual

$$p = p_0 - \rho g z$$

caso de interés en muchos problemas.

2.2.1. Superficies planas

Dada una superficie S definimos su **centroide** como el punto $\mathbf{x}_c$ tal que

$$\int_S \mathbf{x} dS = A \mathbf{x}_c \quad (2.2.2)$$

donde A es el área de S . Notar que $\mathbf{x}_c \in S$. Notar que el centroide es **intrínseco**, en coordenadas fijas a la superficie es independiente de rotaciones o traslaciones de la misma (se podría demostrar como ejercicio).

De (2.2.2) resulta claro que *la integral de cualquier función afín f sobre S es igual a A multiplicada por el valor de f en $\mathbf{x}_c$.*

Demostración: Por ser afín, f puede escribirse como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$$

de donde

$$\int_S f(\mathbf{x}) dS = \mathbf{a}A + \mathbf{b} \cdot \int_S \mathbf{x} dS = \mathbf{a}A + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_c A = Af(\mathbf{x}_c)$$

Utilizando esta propiedad, si la presión es una función lineal (como es en particular $p = p_a - \rho g z$), resulta

$$\mathbf{F} = \int_S p \mathbf{n} dS = p(\mathbf{x}_c) A \mathbf{n} \quad (2.2.3)$$

es decir que la fuerza es igual a la que ejercería una presión uniforme igual a la existente en el centroide de S .

Sin embargo, esta fuerza no está ejercida en una recta que pasa por el centroide de S . Denominamos **centro de presión** $\mathbf{x}_p$ al punto de S en el cual, de aplicarse F , el torque ejercido es igual al ejercido por el campo real de presiones.

$$\int_S p \mathbf{x} \times \mathbf{n} dS = \mathbf{x}_p \times \mathbf{F} \quad (2.2.4)$$

que también implica

$$\int_S p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \times \mathbf{n} dS = (\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_c) \times \mathbf{F} \quad (2.2.5)$$

Podemos llevar los cálculos más allá si definimos nuevas coordenadas (ξ, η) sobre el plano de la placa, de manera tal que las líneas de η constante coincidan con las líneas de presión constante (esto siempre es posible si la presión es afín).

De esta manera, utilizando que $p(\xi, \eta) = a + b\xi$ y que $\mathbf{x} - \mathbf{x}_c$ puede escribirse como $(\xi - \xi_c, \eta - \eta_c)$ por estar en el plano de S , resulta de (2.2.5)

$$(\xi_p - \xi_c)A(a + b\xi_c) = \int_S (a + b\xi)(\xi - \xi_c) dS = \int_S b(\xi - \xi_c)(\xi - \xi_c) dS \Rightarrow \xi_p - \xi_c = \frac{I_{\xi\xi}}{\xi_c + \frac{a}{b}}$$

y, similarmente,

$$(\eta_p - \eta_c)A(a + b\xi_c) = \int_S (a + b\xi)(\eta - \eta_c) dS = \int_S b(\xi - \xi_c)(\eta - \eta_c) dS \Rightarrow \eta_p - \eta_c = \frac{I_{\xi\eta}}{\xi_c + \frac{a}{b}}$$

Notar que a se calcula a partir del ángulo de inclinación de S respecto de la vertical.

2.2.2. Cálculo standard de fuerzas en superficies planas

Redefinamos x como una coordenada que vale cero en la superficie libre y va hacia abajo por la intersección entre S y el plano definido por $\mathbf{n}$ y $\mathbf{k}$. Sea θ la inclinación de x respecto de la horizontal, i.e., $z = -x \sin \theta$.

2.2.3. Superficies curvas

Se puede calcular, pero a veces se simplifican mucho los problemas usando el **Principio de Arquímedes**: El empuje recibido por un cuerpo es igual al peso del volumen desalojado.

Claramente el empuje está aplicado en la recta vertical que pasa por el centro de gravedad del fluido desalojado.

Ejemplo: Una esfera semisumergida.

$$F_z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} R \sin \varphi \rho g R R \cos \varphi \sin \varphi d\theta d\varphi$$

que haciendo la integral termina dando $\frac{2}{3}\pi R^3 \rho g$, justamente lo que daría el principio de Arquímedes.

2.2.4. Caso de sistemas no inerciales

Supongamos que el fluido está sujeto a una aceleración uniforme. En ese caso, si en ese referencial el fluido está en reposo, simplemente va a tener una gravedad efectiva $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}$.

Si tenemos el sistema en rotación uniforme,

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})$$

y su componente radial es entonces

$$a_r = -r\Omega^2$$

y

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{a} = -g\mathbf{e}_z + r\Omega^2\mathbf{e}_r$$

Si $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_z$ resulta entonces

$$p = p_0 - \rho g z + \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2$$

2.3. Hidrostática de fluidos estratificados

Atmósfera estable o inestable, temperatura adiabática...?

2.4. Flotación y estabilidad

Esfera no uniforme. Dos posiciones de equilibrio. Se puede ver que una es estable y otra inestable, es fácil porque la línea de acción del empuje es independiente de la posición. En un caso más general hay que considerar no sólo el cambio de la línea de acción del peso sino también el cambio en la línea de acción del empuje.

Metacentro. Para empezar *no es el centro de gravedad del líquido desalojado*.

La distancia entre el centro de gravedad del cuerpo y el metacentro se llama **distancia metacéntrica**. Si es *positiva* (metacentro por encima del centro de gravedad), el equilibrio es estable.

Calcular el metacentro de un paralelepípedo rectangular.

2.5. Fórmulas

Proposición 2.5.1 *Sea S una superficie cerrada regular, que es el borde de un volumen V . Entonces*

$$\int_S f(\mathbf{x}) \mathbf{n} \, dS = \int_V \nabla f(\mathbf{x}) \, dV \quad (2.5.1)$$

Dem: Tomemos la componente 1 de esta ecuación, y escribamos $n_1 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}$, con lo cual

$$\int_S f(\mathbf{x}) n_1 \, dS = \int_S f(\mathbf{x}) \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \operatorname{div} (f(\mathbf{x}) \mathbf{i}) \, dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial x_1} \, dV$$

donde en la última igualdad hemos usado el célebre teorema de la divergencia. Las otras componentes de la identidad se demuestran idénticamente.

Capítulo 3

Ecuaciones fundamentales

Las ecuaciones fundamentales de los fluidos las deduciremos a partir de:

1. El principio de conservación de la masa.
2. Las leyes de Newton: Tanto la conservación de la cantidad de movimiento como el principio de acción y reacción, implícito en el concepto de tensor de tensiones.
3. El principio de conservación de la energía.
4. Las leyes constitutivas, particularizadas para *fluidos newtonianos*, que son los únicos considerados en este curso.

La traducción de los principio globales de conservación a ecuaciones puntuales requieren de una herramienta matemática, usualmente conocida como Teorema de Transporte de Reynolds, que no es sino una metodología de cálculo de derivadas temporales de integrales sobre volúmenes en movimiento arbitrario.

3.1. Derivadas de integrales sobre dominios móviles

Sea Ω_0 una región del espacio, $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$, y sea $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ un campo vectorial definido en Ω_0 . A partir de Ω_0 y $\mathbf{w}$ podemos construir un “dominio móvil” $\Omega(t)$, al menos para tiempos t suficientemente pequeños, según la fórmula

$$\Omega(t) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x})t, \mathbf{x} \in \Omega_0\} \quad (3.1.1)$$

Notar que $\Omega(0) = \Omega_0$, y que $\Omega(t)$ puede interpretarse como “el lugar que ocuparían los puntos de Ω_0 al tiempo t si se hubieran movido con la velocidad asignada por el campo vectorial $\mathbf{w}$ ”.

Sea también $f(\mathbf{x}, t)$ una función escalar definida en todos los $\Omega(t)$ (es decir, para todo t de interés, f está definida $\forall \mathbf{x} \in \Omega(t)$).

Consideremos la siguiente integral

$$I(t) = \int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (3.1.2)$$

Está claro que $I(t)$ depende de $\mathbf{w}$, ya que $\mathbf{w}$ define el dominio de integración. Sin embargo, $I(0)$ es independiente de $\mathbf{w}$.

La pregunta que nos formulamos es: *Cuánto vale la derivada temporal de I en el instante $t = 0$?* Puesto que $I(0)$ no depende de $\mathbf{w}$, pero su derivada temporal sí (ya que $I(t)$ depende de $\mathbf{w}$ para todo $t > 0$), denotaremos esta derivada como

$$\frac{d_{\mathbf{w}}I}{dt}(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega(\tau)} f(\mathbf{x}, \tau) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_0} f(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x}}{\tau} \quad (3.1.3)$$

Teorema 3.1.1 *Con las definiciones anteriores, si los campos f y $\mathbf{w}$ son suficientemente regulares, se cumple*

$$\frac{d_{\mathbf{w}}I}{dt}(0) = \int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{w} f) \right] d\mathbf{x} \quad (3.1.4)$$

que también puede escribirse en función sólo del valor de $\mathbf{w}$ en el borde de Ω_0 según

$$\frac{d_{\mathbf{w}}I}{dt}(0) = \int_{\Omega_0} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_0} f(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (3.1.5)$$

Dem: Dar sólo una idea de para dónde va la cosa.

3.2. Conservación de la masa

3.2.1. La ecuación general

Consideraremos el siguiente principio de conservación: *En toda evolución de un cuerpo, la masa total del mismo es constante.*

Al aplicar este principio a los fluidos, debemos convenir que cualquier conjunto de partículas del mismo puede ser considerado un cuerpo. Adoptando un enfoque Euleriano por el momento, podemos considerar que todo volumen Ω_0 que definamos en el seno del fluido identifica así a un cuerpo, el formado por las partículas que ocupan posiciones interiores a Ω_0 en el instante actual. Este cuerpo, si definimos transitoriamente y sin pérdida de generalidad el instante actual como $t = 0$, se moverá a tiempos pequeños siguiendo al campo de velocidad Euleriano $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ocupando volúmenes $\Omega(t)$ definidos por (3.1.1) con $\mathbf{u}$ ocupando el lugar de $\mathbf{w}$. La **masa** del cuerpo así definido viene dada por

$$\mathcal{M}(t) = \int_{\Omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (3.2.1)$$

y el principio de conservación de la masa indica simplemente que

$$\frac{d_{\mathbf{u}}\mathcal{M}}{dt} = 0$$

y, por lo tanto,

$$\int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{u} f) \right] d\mathbf{x} = 0 \quad (3.2.2)$$

Ahora bien, esta igualdad debe cumplirse *para todo* dominio Ω_0 que elijamos y *para todo* instante de tiempo. Por lo tanto, su integrando debe ser nulo en todo punto $\mathbf{x}$ y en todo instante, i.e.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.2.3)$$

que no es sino la **ecuación de conservación de la masa**.

3.2.2. Balance detallado

No sólo la masa debe conservarse, sino, por ejemplo, la masa de cada componente química que no reaccione, o también el número de átomos de cada especie aún si existen reacciones químicas dentro del fluido. Con la metodología anterior es fácil hallar ecuaciones para las diferentes variables.

Sea C_A , por ejemplo, la **concentración** relativa de la sustancia A, definida como la fracción másica de la sustancia A dentro del fluido (gramos de A por gramo de fluido). La masa total de A en Ω_0 no es sino la integral de ρC_A y por lo tanto

$$\frac{\partial(\rho C_A)}{\partial t} + \text{div} (\rho C_A \mathbf{u}) = 0 \quad (3.2.4)$$

Notemos que, desarrollando las derivadas de producto y utilizando (3.2.3) resulta, equivalentemente,

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C_A = 0 \quad (3.2.5)$$

Es decir que *la derivada material de la concentración relativa de cualquier sustancia es siempre nula*, o, lo que es lo mismo, que la concentración relativa de cada sustancia constituyente de un fluido es constante en cada trayectoria.

En general, resultará claro de lo anterior que, si $I = \int_{\Omega} \rho \psi \, d\mathbf{x}$, entonces

$$\frac{d_{\mathbf{u}} I}{dt} = \int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi \right) d\mathbf{x} \quad (3.2.6)$$

cualquiera sea ψ .

3.3. Conservación de la cantidad de movimiento

Repitiendo el razonamiento de la sección anterior, y utilizando $\mathbf{K}_0$ para denotar la cantidad de movimiento de un cuerpo definido como la unión de las partículas que están presentes en una cierta región Ω_0 del espacio en el instante t_0 ,

$$\mathbf{K}_0 = \int_{\Omega_0} \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \quad (3.3.1)$$

entonces, de la segunda ley de Newton, si $\mathbf{f}$ es la fuerza volumétrica presente,

$$\frac{d_{\mathbf{u}} \mathbf{K}_0}{dt} = \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (3.3.2)$$

y utilizando (3.1.5) y (3.2.6) obtenemos dos versiones de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \text{div} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \text{div} \sigma + \mathbf{f} \quad (3.3.3)$$

que se denomina *versión conservativa*, y

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \text{div} \sigma + \mathbf{f} \quad (3.3.4)$$

(version no conservativa)

Las mismas ecuaciones, escritas en componentes (sumatoria sobre índices repetidos implícita)

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (3.3.5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (3.3.6)$$

Combinando la ecuación de conservación de la masa para un fluido de densidad constante con la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento de un fluido newtoniano llegamos a las célebres ecuaciones de Navier-Stokes (caso incompresible)

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] - \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.3.7)$$

$$\text{div} \mathbf{u} = 0 \quad (3.3.8)$$

En el caso de un *flujo incompresible con propiedades* (ρ, μ) *constantes*, estas ecuaciones configuran un sistema cerrado. Es posible hallar $\mathbf{u}$ y p sin resolver la conservación de la energía, que se desacopla del sistema.

Expresiones en coordenadas de las ecuaciones.

Coordenadas cartesianas. Flujo entre placas paralelas.

Coordenadas cilíndricas. Flujo en un ducto cilíndrico.

$$\rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (3.3.9)$$

$$\rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta + \mu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (3.3.10)$$

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \mu \nabla^2 u_z \quad (3.3.11)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.3.12)$$

donde

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.3.13)$$

y

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.3.14)$$

Coordenadas naturales

Notemos las siguientes propiedades

Si definimos la **vorticidad**

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.3.15)$$

notemos que

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) - \mathbf{u} \times \omega \quad (3.3.16)$$

Dem:

$$(\mathbf{u} \times \omega)_i = \epsilon_{ijk} u_j \omega_k = \epsilon_{ijk} u_j \epsilon_{klm} u_{m,l} = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) u_j u_{m,l} = u_j u_{j,i} - u_j u_{i,j} \quad \square$$

Asimismo, para un flujo incompresible,

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \omega \quad (3.3.17)$$

3.4. La ecuación de Bernoulli

Si suponemos que la fuerza volumétrica *por unidad de masa* es el gradiente de un potencial $\mathcal{U}$, i.e.,

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{f}}{\rho} = -\nabla \mathcal{U}$$

si además llamamos $\mathbf{f}_v$ a las fuerzas viscosas, que en el caso particular de fluido newtoniano incompresible toman el valor $\mathbf{f}_v = \mu \nabla^2 \mathbf{u}$, y si dividimos la ecuación de momento por ρ y la multiplicamos escalarmente por ds obtenemos

$$d \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{U} \right) + \frac{dp}{\rho} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot ds = (\mathbf{u} \times \omega) \cdot ds + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_v \cdot ds \quad (3.4.1)$$

Esta ecuación general tiene muchas aplicaciones, en particular formulada en casos particulares que permiten expresiones más explícitas.

En particular, para que resulte de utilidad vamos a suponer que el fluido está sujeto a una **evolución barotrópica**, es decir que su densidad es sólo función de su presión, $\rho = \rho(p)$, y llamaremos $P(p)$ a la integral

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')} \quad (3.4.2)$$

Casos particulares:

$$\text{Flujo a densidad constante, } \rho = \rho \Rightarrow P(p) = \frac{p - p_0}{\rho} \quad (3.4.3)$$

$$\text{Flujo politrópico, } \rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow P(p) = \frac{\gamma p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{(\gamma - 1) \rho_0} \left(p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \quad (3.4.4)$$

notar que un flujo isotérmico de un gas ideal es un caso particular de flujo politrópico con $\gamma = 1$, mientras que si el flujo es isoentrópico será $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$. Notar finalmente que esta definición de $P(p)$ implica

$$\nabla P = \frac{1}{\rho} \nabla p \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{\rho} = dP \quad (3.4.5)$$

Llegamos así, hasta ahora, a

$$d \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{U} + P \right) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_v \cdot d\mathbf{s} \quad (3.4.6)$$

3.4.1. Flujo estacionario: Líneas de corriente

A lo largo de una línea de corriente entre , por cumplirse $(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot d\mathbf{s} = 0$, resulta

$$d \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{U} + P \right) = \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_v \cdot d\mathbf{s} \quad (3.4.7)$$

Si integramos entre dos puntos (A y B) sobre una misma línea de corriente, tendremos

$$\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{U} + P \right) \Big|_B - \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{U} + P \right) \Big|_A = \text{pérdidas viscosas entre } A \text{ y } B \quad (3.4.8)$$

y si estas pérdidas resultaren despreciables para la precisión de nuestro cálculo, tendremos que

$$\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{U} + P \right) \Big|_B = \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{U} + P \right) \Big|_A \quad (3.4.9)$$

Cuando las fuerzas volumétricas contienen únicamente la gravedad resulta, desde luego, $\mathcal{U} = gz$, con z la coordenada vertical.

Ejemplo 3.4.1 Presión de estancamiento: Si una corriente uniforme de velocidad U_∞ incide sobre un cuerpo romo, existe una línea de corriente que termina en un punto del cuerpo. Si A es un punto situado sobre la misma línea de corriente pero lejos del cuerpo, en dicho punto de estancamiento E la presión será, en el caso incompresible,

$$p_E = p_A + \frac{\rho U_\infty^2}{2} + \rho g(z_A - z_E) \quad (3.4.10)$$

en cambio, en el caso compresible isoentrópico será

$$p_E = \left\{ \frac{(\gamma - 1)\rho_A}{\gamma p_A^{\frac{1}{\gamma}}} \left[\frac{U_\infty^2}{2} + g(z_A - z_E) \right] + p_A^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.4.11)$$

Ejemplo 3.4.2 Tubo de Pitot

Ejemplo 3.4.3 Flujo a través de un orificio pequeño

3.4.2. Flujo estacionario: Líneas de vorticidad

De (3.4.6) resulta claro que, una vez más despreciando las pérdidas viscosas, también se conserva $\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{U} + P$ a lo largo de una línea que sea en todo punto tangente a la vorticidad.

3.4.3. Flujo irrotacional

En un flujo irrotacional, que es una buena aproximación de muchos flujos reales, el primer término del segundo miembro de (3.4.6) es nulo. Además, el término viscoso puede de hecho ser despreciable, o incluso ser nulo si el flujo es incompresible por la identidad $\mu \nabla^2 \mathbf{u} = -\mu \nabla \times \boldsymbol{\omega}$.

Anulándose el segundo miembro de (3.4.6), si llamamos ϕ al **potencial de velocidad**, definido de modo que $\mathbf{u} = \nabla \phi$ (que siempre existe por ser $\nabla \times \mathbf{u} = 0$) resulta que

$$d \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{U} + P + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.4.12)$$

y por lo tanto $\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{U} + P + \frac{\partial \phi}{\partial t}$ es **constante** en la región donde ocurre el flujo (aunque puede depender del tiempo).

Ejemplo 3.4.4 Caudalímetro Venturi

3.4.4. Alturas de columna de líquido

En el caso de un flujo estacionario a densidad constante bajo la acción de la gravedad (uniforme, g) se puede definir una altura

$$H = \frac{|\mathbf{u}|^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \quad (3.4.13)$$

y esta altura, si el flujo es irrotacional, es **constante**, la misma para todo punto del flujo.

El primer término se denomina *altura de velocidad*, el segundo *altura de presión*, y el tercero *altura potencial*. La *altura total* H es la altura a la que llega la columna de líquido en un tubo de Pitot, medida respecto de una referencia dada.

El funcionamiento mismo de un tubo de Pitot-estático muestra que H en realidad no es uniforme, se producen *pérdidas* por diversos motivos, en general asociadas a la *generación de vorticidad*, pero eso lo veremos más adelante.

3.5. Conservación de la energía

Nuevamente repetimos el razonamiento de definir un cuerpo como la unión de las partículas que ocupan la región Ω_0 al instante t_0 . La energía de este cuerpo, considerando únicamente la cinética y la interna, es

$$E_0 = \int_{\Omega_0} \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + e \right) d\mathbf{x} \quad (3.5.1)$$

De esta forma, si definimos a $\mathbf{q}$ como el flujo de calor y a Q como la fuente volumétrica de calor por unidad de volumen, resulta, del primer principio de la termodinámica (recordar, normal exterior),

$$\frac{d_{\mathbf{u}}E_0}{dt} = \int_{\Omega_0} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + Q) dx + \int_{\partial\Omega_0} (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} dx \quad (3.5.2)$$

Aplicando ahora la fórmula de integración en dominio móvil y el teorema de la divergencia resulta

$$\int_{\Omega_0} \left\{ \rho \left(\mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{De}{Dt} \right) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \text{div} (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - Q + \text{div} \mathbf{q} \right\} dx = 0 \quad (3.5.3)$$

Utilizando la identidad

$$\text{div} (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{u} \cdot \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} \quad (3.5.4)$$

y recordando que

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} - \text{div} \boldsymbol{\sigma} = 0$$

por la conservación de la cantidad de movimiento, resulta que en cada punto debe cumplirse la **ecuación de conservación de la energía**

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\text{div} \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} + Q \quad (3.5.5)$$

Para un fluido newtoniano, recordando la definición de la tasa de deformación $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} \nabla^T \mathbf{u})$ resulta

$$\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = -p \text{div} \mathbf{u} + (3\lambda + 2\mu)(\text{div} \mathbf{u})^2 + 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}'$$

donde para un tensor cualquiera $\mathbf{T}$ se define su **desviador** como

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T} - \frac{1}{3} \text{traza}(\mathbf{T}) \mathbf{1} \quad (3.5.6)$$

La **función de disipación** es

$$\Phi = (3\lambda + 2\mu) (\text{div} \mathbf{u})^2 + 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}' \quad (3.5.7)$$

cuyo primer término es una **disipación volumétrica**, que sólo es nula si el flujo es isocórico o si $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$. Esto último se conoce como **hipótesis de Stokes**, y si bien no introduce errores considerables en gases en general, es falsa, en especial para gases densos y líquidos.

Recordemos la definición de **entalpía** por unidad de masa, $h = e + \frac{p}{\rho}$, de donde

$$\frac{De}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \text{div} \mathbf{u}$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en (3.5.5) obtenemos

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = -\text{div } \mathbf{q} + \Phi + Q \quad (3.5.8)$$

Por último, es interesante reformular esta última ecuación en términos del calor específico a presión constante

$$c_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p \quad (3.5.9)$$

y del coeficiente de expansión térmica β ,

$$\beta = \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p \quad (3.5.10)$$

donde $v = \rho^{-1}$ es el volumen específico. Para ello, basta notar que

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = \rho c_p \frac{DT}{Dt} + \left(\rho \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T - 1 \right) \frac{Dp}{Dt}$$

y realizar el siguiente cálculo

$$\left. \frac{\partial(e + pv)}{\partial p} \right|_T = \left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_T + v + p \left. \frac{\partial v}{\partial p} \right|_T$$

agregando la relación termodinámica

$$\left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_T = -p \left. \frac{\partial v}{\partial p} \right|_T - T \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p$$

de donde

$$\left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T = -T \left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_p + v \quad (3.5.11)$$

que, reemplazado en (3.5.8), da

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \beta T \frac{Dp}{Dt} = -\text{div } \mathbf{q} + \Phi + Q \quad (3.5.12)$$

a lo cual todavía podemos agregar la **ley de Fourier**

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (3.5.13)$$

para quedar con una ecuación que “sólo” relaciona temperatura y presión como incógnitas. Notar que si el fluido tiene coeficiente nulo de expansión térmica recuperamos la conocida ecuación del calor, aunque con una derivada material en la temperatura en lugar de una derivada parcial respecto del tiempo.

Capítulo 4

Relaciones integrales

A partir de las ecuaciones fundamentales vistas en el capítulo anterior deducimos las leyes de balance en volúmenes arbitrariamente elegidos (y que evolucionan arbitrariamente en el tiempo). Aplicamos los resultados en diversos casos de interés.

4.1. Relación básica y aplicaciones

Definamos un dominio $\Omega(t)$ moviéndose según el campo de velocidad $\mathbf{w}$, que **no necesariamente coincide** con el campo de velocidad $\mathbf{u}$ del fluido contenido en él. La relación básica que utilizaremos se deduce directamente de la primera sección del capítulo anterior: Si

$$I(t) = \int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (4.1.1)$$

entonces

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d_{\mathbf{w}}I}{dt} = \frac{d_{\mathbf{u}}I}{dt} - \int_{\partial\Omega(t)} f [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \quad (4.1.2)$$

4.1.1. Conservación de la masa

Puesto que, si $f = \rho$, definimos

$$I(t) = M(t) = \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) d\mathbf{x}$$

y del principio fundamental $\frac{d_{\mathbf{u}}I}{dt} = 0$, resulta

$$\frac{dM}{dt} = - \int_{\partial\Omega(t)} f [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \quad (4.1.3)$$

es decir “el cambio en la masa contenida en $\Omega(t)$ es igual al balance de los flujos másicos de entrada y de salida”. Notar que al calcular el flujo másico de entrada al volumen $\Omega(t)$ (**volumen de control**) se utiliza la **velocidad relativa** del fluido respecto del movimiento de la **superficie de control** que delimita a $\Omega(t)$. Recordar que la normal es exterior.

Ejemplo 1: Conservación de la masa en un caso 1D ,

$$\frac{\partial}{\partial t} [\bar{\rho}(s, t) A(s, t)] + \frac{\partial}{\partial s} [\bar{\rho}(s, t) A(s, t) \bar{U}(s, t)] \quad (4.1.4)$$

Ejemplo 2: Ecuación de Reynolds dándose el perfil.

4.1.2. Conservación de la cantidad de movimiento

Repitiendo el razonamiento de la sección anterior, y utilizando $\mathbf{K}(t)$ para denotar la cantidad de movimiento

$$\mathbf{K}(t) = \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \quad (4.1.5)$$

resulta,

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \int_{\Omega(t)} \mathbf{f} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{F} \, d\Gamma - \int_{\partial\Omega(t)} \rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}] \, d\Gamma \quad (4.1.6)$$

donde $\mathbf{F} = \sigma \cdot \mathbf{n}$ son las fuerzas aplicadas sobre la superficie de control. Una vez más hemos llegado a que "el cambio en la cantidad de movimiento contenida en el volumen de control es igual a la resultante de las fuerzas aplicadas más el balance de los flujos de cantidad de movimiento por la superficie de control", lo cual es sin duda muy razonable.

Ejemplo 1:

Conservación de $\mathbf{K}$ en un caso 1D (en este caso asumimos que el eje central es recto),

$$\frac{\partial}{\partial t} [\bar{\rho} A \bar{U}] + \frac{\partial}{\partial s} [\beta \bar{\rho} A \bar{U}^2] + A \frac{\partial}{\partial s} = \bar{\rho} A g_s - \bar{c}_f \bar{\rho} \bar{U}^2 P \quad (4.1.7)$$

con β el factor de corrección de momento, y c_f el coeficiente promedio de fricción

$$\bar{\tau}_w = \bar{c}_f \bar{\rho} \bar{U}^2 \quad (4.1.8)$$

Ejemplo 2: Asumiendo un perfil y en combinación con Bernoulli
Estimación de la caída de presión en una longitud de desarrollo.

$$p - p_0 \simeq -\frac{2\rho U_0^2}{(n+1)H} (\delta - \delta_0) \quad (4.1.9)$$

Ejemplo 3: Fuerza en una curva

Tomemos el extremo de un caño de diámetro D que, en su extremo, tiene una boquilla curva que desvía el flujo un ángulo θ . La pregunta es la fuerza que realiza el resto del caño sobre la boquilla. Tomando un volumen de control que es exterior a la boquilla y la corta antes de que comience la curva vemos que $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = 0$. Suponiendo perfiles constantes de velocidad en entrada y salida resulta, sin fuerzas volumétricas,

$$\mathbf{F} = \dot{m} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_e) - \int_{\partial V} p \mathbf{n} \, d\Gamma$$

donde $\mathbf{u}_s$ es la velocidad a la salida, $\mathbf{u}_e$ la velocidad a la entrada, y $\dot{m}$ el flujo másico. Considerando que el caño de entrada está en la dirección x , la integral de presión es igual a $\frac{1}{4}(p_e - p_s)\pi D^2$ y la diferencia de velocidades es igual a

$$\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_e = \frac{4\dot{m}}{\pi D^2 \rho} ((1 - \cos \theta), \sin \theta)$$

de estas relaciones sale $\mathbf{F}$ fácilmente. En principio la presión p_e es mayor que p_s por pérdidas por fricción (y por flujo secundario) en la boquilla, que muchas veces son despreciables. En cambio, si el área de entrada A_e fuera mayor que el área de salida A_s la aceleración del fluido produciría una caída de presión adicional que podría estimarse utilizando Bernoulli.

4.1.3. Conservación del momento angular

$$\mathbf{L}(t) = \int_{\Omega(t)} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \quad (4.1.10)$$

resulta,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \int_{\Omega(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{f} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{F} \, d\Gamma - \int_{\partial\Omega(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}] \, d\Gamma \quad (4.1.11)$$

4.1.4. Conservación de la energía

$$E(t) = \int_{\Omega(t)} \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + e + V \right) \, d\mathbf{x} \quad (4.1.12)$$

(notar que hemos agregado la energía potencial V por unidad de masa, típicamente igual a gz) y así

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} - \int_{\partial\Omega(t)} \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + e + V \right) (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (4.1.13)$$

donde $\dot{Q}$ es el calor neto intercambiado con el medio (positivo si entra al volumen de control) y $\dot{W}$ el trabajo neto ejercido sobre el medio. Vamos ahora a descomponer la potencia en potencia entregada en el eje más potencia de las fuerzas viscosas en la superficie más potencia de la presión, i.e.,

$$\dot{W} = \dot{W}_{\text{eje}} + \dot{W}_{\text{viscoso}} + \int_{\partial\Omega(t)} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (4.1.14)$$

Considerando ahora un volumen de control fijo y en estado estacionario, si reemplazamos llegamos a

$$\int_{\partial\Omega(t)} \rho \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + e + V \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \dot{Q} - \dot{W}_{\text{eje}} - \dot{W}_{\text{viscoso}} \quad (4.1.15)$$

en el caso particular de una entrada y una salida con perfiles razonablemente planos de propiedades, utilizando la entalpía por unidad de masa $h = e + pv$, con $v = \rho^{-1}$ el volumen específico, resulta

$$\dot{m} \left\{ \left(h + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + V \right)_{\text{salida}} - \left(h + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + V \right)_{\text{entrada}} \right\} = \dot{Q} - \dot{W}_{\text{eje}} - \dot{W}_{\text{viscoso}} \quad (4.1.16)$$

Notar que se trata del trabajo viscoso *a través de la superficie de control*, que en general es pequeño. El trabajo viscoso en la hélice, por ejemplo, debe incorporarse al trabajo en el eje, ya que lo que se ve de afuera es el trabajo “neto” en el eje. Así podemos interpretar esto de otra manera: La entalpía (temperatura) de lo que sale es igual a lo que entra, más el calor ingresado, menos lo que se haya conseguido sacar como trabajo útil. Notar por lo tanto que dentro del trabajo viscoso *no está* la disipación viscosa.

Ojo: Esta ecuación se suele ver como una justificación de Bernoulli. En realidad notemos que con $c_p = 4180 \text{J}(\text{kg}\cdot\text{K})^{-1}$ es precisa una velocidad de 100 m/s para que esto implique un cambio de entalpía parecido al de un aumento de 1 K en temperatura.

Ejercicio: Con entrada plana a una tobera (boquilla de manguera), determinar la fuerza necesaria para tenerla en su lugar con perfil plano de salida y con perfil parabólico.

problema 6.83 de Wilcox.

4.1.5. Aplicación a dispositivos

Difusores

Basado en Applied Fluid Dynamics Handbook y en Idelchik.
Se define el coeficiente de recuperación de presión

$$C_p = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2} \rho U_1^2} \quad (4.1.17)$$

de manera tal que, por Bernoulli, el C_p teórico sin pérdidas es

$$C_{p,sp} = 1 - \frac{A_1^2}{A_2^2} \quad (4.1.18)$$

También se define un K , de manera que la pérdida en la “constante” de Bernoulli sea

$$\Delta H = \frac{1}{2} K \rho U_1^2 \quad (4.1.19)$$

y es fácil ver que $K = C_{p,sp} - C_p$. Similarmente, la eficiencia del difusor es

$$\eta = \frac{C_p}{C_{p,sp}} \quad (4.1.20)$$

El tema crítico en difusores es su entrada *en pérdida* (stall). Se describen diversos regímenes (a medida que aumenta el ángulo):

- Flujo sin pérdidas: El C_p va aumentando hasta llegar a un máximo cuando comienza la pérdida transitoria.
- Pérdida transitoria leve: C_p baja.
- Pérdida transitoria severa: C_p sigue bajando.
- Pérdida biestable: C_p es prácticamente constante.
- Pérdida tipo chorro: C_p es constante, algo menor que en el caso anterior. Hay una discontinuidad (e histéresis en el ángulo) cuando pasa a este régimen.

Curvas reales de difusores planos (o bidimensionales). C_p^* . C_p^{**} : Máximo C_p obtenible para una dada relación de áreas, las curvas muestran que corresponde prácticamente a una línea de ángulo $2\theta = 7$ grados. Este óptimo suele estar en la zona transitoria. Factor de corrección por velocidad de entrada no uniforme.

Difusores cónicos. Difusores anulares. Algunas curvas.

Técnicas para retardar la entrada en pérdida. Succión de la capa límite. Inyección tangencial. "Vanes", paredes intermedias (bastante usado). Deflectores.

Para unir dos caños de diferente diámetro conviene poner un difusor de máximo C_p para esa longitud, y después conectar con una expansión abrupta (si no da la longitud).

Placas uniformizadoras de flujo

Basado en Perry, Chemical Engineer's Handbook. Jorge Leiva.

En un tubo, por una perturbación anterior (un codo, un encuentro de caños, etc), existe un flujo no uniforme (caso incompresible). Se desea uniformizar ese flujo, para lo cual se introduce una resistencia.

Las zonas de más velocidad al acercarse a la resistencia se desacelerarán, y viceversa.

Ponemos una placa con muchas perforaciones. Por conservación de la masa, si A es el área del tubo y A_p es el área libre de la placa, resulta

$$AU = A_p U_p \quad (4.1.21)$$

donde U_p es la velocidad dentro de los agujeros. Usamos β , factor de corrección de momento, y despreciando pérdidas

$$p - p_p + \frac{1}{2}\rho\beta_p \left(\frac{\beta}{\beta_p} \left(\frac{A}{A_p} \right)^2 - 1 \right) U_p^2 = 0 \quad (4.1.22)$$

de donde $\dot{m}$ resulta

$$\dot{m} = A_p \left[\frac{2\rho\Delta p}{\beta_2 \left(1 - \frac{\beta A^2}{\beta_p A_p^2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.1.23)$$

donde hemos despreciado las pérdidas de entrada a los agujeros, entre otras. Defino entonces, para un dado Δp ,

$$C = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_{sp}} \quad (4.1.24)$$

(subíndice *sf* indica “sin pérdidas”). Este C es menor que uno, definimos

$$\frac{1}{C^2} = 1 + \delta \quad (4.1.25)$$

la pérdida en la constante de Bernoulli puede escribirse como

$$\Delta H = \frac{1}{2} \rho K U_p^2 \quad (4.1.26)$$

con

$$K = \beta \delta \left[1 - \frac{\beta A^2}{\beta_p A_p^2} \right] \quad (4.1.27)$$

Una vez que tenemos este K , volvamos al problema original. Tomemos una línea de corriente que pase por el máximo de velocidad

$$p + \frac{1}{2} \rho U_{\text{máx}}^2 - (p_2 + \frac{1}{2} \rho U_{p,\text{máx}}^2 = \frac{1}{2} K \rho U_{p,\text{máx}}^2 \quad (4.1.28)$$

Entonces tengo una relación para la línea de corriente que pasa por el máximo, y otra para el medio de la velocidad.

Resulta

$$\left(\frac{U_{\text{máx},2}}{U^2} \right)^2 - \beta_2 = \frac{1}{1+K} \left[\left(\frac{U_{\text{máx},1}}{U^2} \right)^2 - \beta_1 \right] \quad (4.1.29)$$

El coeficiente de corrección C (para el cálculo del K a partir de la relación de áreas) va entre 0.7 y 1.

Un primer análisis de turbinas Pelton

Vertederos

Por análisis dimensional

$$\frac{Q}{g^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}} b} = f \left(\frac{H}{h}, \frac{b}{h} \right) \quad (4.1.30)$$

donde ya hemos supuesto que el Re es suficientemente alto como para tirar la densidad y la viscosidad. En el límite de H y b muy grandes respecto de h esa función del segundo miembro es un número, que desde luego depende de la forma detallada de la embocadura del vertedero.

Una fórmula de manual (Handbook of Applied Fluid Dynamics) debida a Ackers es

$$Q = 0.564 \left(1 + 0.15 \frac{h}{H} \right) b g^{\frac{1}{2}} (h + 0.001m)^{\frac{3}{2}} \quad (4.1.31)$$

que vale si $h > 2$ cm, $H > 15$ cm, $\frac{h}{H} < 2.2$. Corresponde a una embocadura del orden de 2 mm de espesor (una placa con un chanfle a 45 grados).

Vertederos no planos sino con abertura triangular. En este caso Q va como $h^{\frac{5}{2}}$.

$$Q = K \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) g^{\frac{1}{2}} (h + k)^{\frac{5}{2}} \quad (4.1.32)$$

donde k es aprox 1 cm. K es aprox 0.58-0.59. Estos son buenos para estabilizar altura y para aireación, pero malos para medir caudal.

Los vertederos diseñados para medir caudal tienen otra forma, que puede calcularse para que el caudal sea lineal con la altura. Estos vertederos se llaman Sutro-notches.

Otros ejemplos

Compuertas.

Jets. Jet contra una superficie.

Bombas de jet. p.209 de Wilcox.

Cohetes.

Flujo uniforme en canales. Resalto hidráulico.

Capítulo 5

Flujo viscoso en conductos

Flujo laminar en conductos. Flujo turbulento en conductos.

Capítulo 6

Análisis dimensional y semejanza

6.1. La homogeneidad dimensional

Las leyes de la física cumplen un principio conocido como *de homogeneidad dimensional*. Esto quiere decir que cualquier ecuación tiene que tener las mismas unidades a ambos lados del signo igual y que lo mismo debe ocurrir con los sumandos de una suma. Aquel viejo adagio de “no sumar peras con manzanas”. Las consecuencias de este principio son de vasto alcance, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

Consideremos una esfera de radio R y masa m_e que soltamos en un fluido quieto de densidad ρ_f . Nos preguntamos en primer lugar cuál será la velocidad terminal de esta esfera. Supongamos que no tenemos idea de qué ecuación se aplica, pero estamos dispuestos a hacer experimentos. Buscamos por lo tanto conocer U_∞ en función de los datos, que cuáles son? En primer lugar, las densidades ρ_e y ρ_f , ya que de hecho la relación entre estas densidades puede incluso cambiar el signo de la velocidad terminal! Qué más? Seguramente la gravedad, ya que si no la hubiera... Suponemos también que R puede jugar un rol, y por ahora no se nos ocurre nada más. Empezamos nuestra búsqueda entonces de una función de la forma

$$U_\infty = F(m_e, \rho_f, g, R) \quad (6.1.1)$$

Ahora bien, lo primero que debemos hacer es buscar combinaciones de nuestros datos que nos den unidades de velocidad. En seguida encontramos una: $\sqrt{gR}$. Si usamos esta “escala” entonces para medir U_∞ concluimos que (usando siempre letras como F o G para denotar “una función de” aunque no necesariamente siempre la misma)

$$\frac{U_\infty}{\sqrt{gR}} = F(m_e, \rho_f, g, R) \quad (6.1.2)$$

El segundo miembro ahora no tiene unidades, y por lo tanto tiene que ser alguna función de combinaciones adimensionales de las variables. En este caso hay una sola manera de combinar los argumentos de F que dé algo adimensional, a saber $\Pi_1 = \frac{m_e}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_f}$, donde agregamos el $\frac{4}{3}\pi$ para hacer notar que este número es la relación entre la masa de la esfera y la del fluido desalojado. Por lo tanto, el segundo miembro no puede

depender ni de g y nuestra formulita se simplifica a

$$\frac{U_\infty}{\sqrt{gR}} = F\left(\frac{m_e}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_f}\right) \quad (6.1.3)$$

Suponemos además que esta función debería ser continua, no? Cuando $\Pi_1 = 1$, la hidrostática nos enseñó ya que U_∞ es nula. Si vamos reduciendo la masa de la esferita a partir de allí, ésta ascenderá, tanto más rápido en principio cuanto menor sea su masa. Para una esferita muy pero muy liviana, digamos, una pelota de ping-pong en agua (o en mercurio si queremos), tendremos Π_1 que tiende a cero. La primer pregunta interesante es: **el límite $F(\Pi_1 \rightarrow 0)$ es finito?** Como “sabemos” que todo depende únicamente de Π_1 , pensamos en una pequeña burbuja de aire ascendiendo en el agua, y concluimos que su velocidad de ascenso mucho no puede depender de su masa, mientras ésta sea realmente pequeña. Decidimos que $F(0)$ es finito y lo llamamos K_1 , por ponerle un nombre, nuestra fórmula final es que *para esferas cuya masa sea mucho menor que la del fluido que desalojan*, debe cumplirse que

$$U_\infty = K_1 \sqrt{gR} \quad (6.1.4)$$

donde K_1 es una constante adimensional universal. Hacemos un experimento, **uno solo**, determinamos K_1 , y somos felices.

En seguida nos damos cuenta de que nos equivocamos, porque ponemos la misma pelotita de ping-pong en agua y en miel, que tienen aproximadamente la misma densidad, y resulta que las velocidades terminales no son las mismas!! Pero volveremos sobre esto más tarde, por ahora sigamos con nuestros cálculos y supongamos que además nos preguntan cuánto tiempo tarda la esfera en alcanzar esta velocidad terminal. Una vez más, planteamos que este tiempo cumple

$$T = G(m_e, \rho_f, g, R) \quad (6.1.5)$$

y la combinación con unidades de tiempo que encontramos es $\sqrt{R/g}$ de donde

$$\frac{T}{\sqrt{\frac{R}{g}}} = G\left(\frac{m_e}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_f}\right) \quad (6.1.6)$$

y de nuevo para esferas muy livianas, si llamamos $K_2 = G(0)$, concluimos que

$$T = K_2 \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (6.1.7)$$

hacemos un experimento, y listo. Gracias al principio de homogeneidad dimensional nos ahorramos infinito esfuerzo experimental! Con un único experimento determinamos K_1 y K_2 , en lugar de hacer familias de experimentos variando los cuatro parámetros originales, m_e , ρ_f , g y R !!

Pero volvamos ahora al problema de nuestra pelota de ping-pong en miel y en agua... en algo nos equivocamos! Esta equivocación sólo puede provenir de nuestra

hipótesis original de que U_∞ depende sólo de aquellas cuatro variables. Sospechamos que nos olvidamos de la viscosidad dinámica μ_f . Será esto cierto? Si así fuera, deberíamos poder *medir* la viscosidad con las variables que ya hemos introducido. Ocurrir que podemos hacerlo, ya que la combinación $\rho_f R \sqrt{gR}$ tiene justamente unidades de viscosidad! Resulta entonces que, definiendo

$$\Pi_2 = \frac{\mu_f}{\rho_f R \sqrt{gR}} \quad (6.1.8)$$

nuestra antigua fórmula para U_∞ deviene

$$\frac{U_\infty}{\sqrt{gR}} = F(\Pi_1, \Pi_2) \quad (6.1.9)$$

Y qué ocurrió con nuestra otrora constante universal K_1 ? También resulta ser $K_1 = K_1(\Pi_2)$. De alguna manera, toda nuestra deducción anterior tiene que haber asumido algún valor para Π_2 , ya que obteníamos valores finitos de U_∞ . Veamos que, cuando $\Pi_2 \rightarrow \infty$, es intuitivo que U_∞ tiende a cero. Por lo tanto no estaba implícito en nuestro razonamiento que la viscosidad era arbitrariamente grande. Habremos asumido algún valor finito? Difícilmente, porque eso implicaría un valor finito de μ y para mantener constante Π_2 tendríamos que haber variado ρ_f en forma acorde con μ , y nuestro resultado nos dijo que U_∞ es independiente de ρ_f !! La única posibilidad que nos queda es que el caso que planteamos antes, cuando nos olvidamos de μ_f , corresponde a $\Pi_2 \rightarrow 0$, una viscosidad despreciable frente a su propia escala $\rho_f R \sqrt{gR}$. Es decir,

$$\mu_f \ll \rho_f R \sqrt{gR} \quad \Rightarrow \quad R \gg \left(\frac{\nu_f^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.1.10)$$

que, para el caso del agua, daría, $R \gg 46$ micrones. Todavía nos faltaría dar un sentido preciso al signo “ $\gg$ ”, para lo cual habría que hacer experimentos viendo a qué radio (valor de Π_2), manteniendo Π_1 muy pequeño, “satura” $U_\infty/\sqrt{gR}$.

6.2. El teorema Π de Buckingham

Matriz dimensional. MLT.

Teorema: n variables pueden siempre combinarse para formar $n-r$ grupos adimensionales, donde r es el rango de la matriz dimensional. Cualquier relación entre esas n variables se transforma entonces en

$$F(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-r}) = 0 \quad (6.2.1)$$

6.3. Algunos números adimensionales frecuentes

- Números geométricos: Relación de aspecto L/D , rugosidad adimensional ϵ/D , etc.

- Número de Euler: $E = \Delta p / (\frac{1}{2} \rho U^2)$.
- Número de Reynolds: $Re = UL/\nu$.
- Número de Mach: $Ma = U/c$.
- Número de Froude: $Fr = U/\sqrt{gH}$.
- Número de Weber: $We = U\sqrt{\rho D/\sigma}$.
- Número de Strouhal: $St = UT/L$.

6.4. Adimensionalización de las ecuaciones de Navier-Stokes

Con escalas de velocidad U y de longitud L , tomando

$$\hat{x} = \frac{x}{L} \quad \hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U} \quad \hat{t} = \frac{tU}{L}$$

resulta, en el caso incompresible,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \dots \tag{6.4.1}$$

6.5. Las escalas de Kolmogorov

Escala de longitud: $\eta_K = (\nu^3/\epsilon)^{\frac{1}{4}}$. Corresponde al tamaño de los vórtices en los que las fuerzas viscosas y de inercia son comparables. En estos vórtices se produce la mayor parte de la disipación viscosa del flujo. No existen vórtices de escala mucho menor que η_K (es la menor escala del flujo).

Escala de tiempo: $\tau_K = (\nu/\epsilon)^{\frac{1}{2}}$. Corresponde al tiempo característico de deformación de los vórtices más pequeños.

6.6. Adimensionalización de las condiciones de contorno

Condición de borde en una superficie libre. Número de Froude.

Incorporación de la tensión superficial. Número de Weber.

6.7. El número de Rossby

Capítulo 7

Turbomáquinas

En general hablaremos de dispositivos que permiten intercambiar energía con el fluido, de las cuales las turbomáquinas son una subclase muy utilizada.

7.1. Bombas de desplazamiento positivo

Fig. 11.1 del White?

Bomba de émbolo con cilindro de volumen variable y dos válvulas (succión, descarga).

Bomba de aceite de un auto. Basada en engranajes que atrapan el fluido en los valles y lo transportan al otro lado.

Bomba de tornillo, similar a la bomba de engranaje. Permite mayor diferencia de presión. Rotor con paletas móviles que se desplazan por gravedad. El rotor está descentrado, dejando huelgo solamente abajo.

Tubo flexible barredor. Para fluidos corrosivos, de manera que no haya contacto del fluido con partes móviles.

Bomba de pistón con dos válvulas. Pozos petroleros.

Tornillo de Arquímedes.

7.2. Bombas dinámicas

Se aprovecha la inercia del fluido para hacer aumentar el head en el fluido, que se traduce en general en hacer aumentar la presión.

$$H = \frac{U^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} \quad (7.2.1)$$

Por tener en general el mismo diámetro y altura los caños de entrada y salida, el cambio de head corresponde al cambio de presión.

La potencia útil de la bomba está dada por la diferencia de presión multiplicada por el caudal.

$$P_W = \Delta p Q = \rho g \Delta H Q \quad (7.2.2)$$

La potencia al freno se define como el producto del torque aplicado y la velocidad angular

$$P_f = \omega T \quad (7.2.3)$$

Debido a pérdidas, la eficiencia

$$\eta = \frac{P_W}{P_f} \quad (7.2.4)$$

en centrífugas normales anda por el 80 %, y aumenta con el tamaño de la bomba.

7.3. Curvas adimensionales

Sea H el cambio de head de la bomba, y P_f su potencia al freno. Planteemos las dependencias,

$$H = f_h(Q, \omega, \rho, \mu, D, \epsilon), \quad P_f = f_p(Q, \omega, \rho, \mu, D, \epsilon) \quad (7.3.1)$$

se definen los coeficientes *manométrico* y *de caudal*:

$$C_H = \frac{gH}{\omega^2 D^2}, \quad C_Q = \frac{Q}{\omega D^3}, \quad C_P = \frac{P_f}{\rho \omega^3 D^5} \quad (7.3.2)$$

resulta

$$C_H = g_1 \left(C_Q, Re_D, \frac{\epsilon}{D} \right) \quad (7.3.3)$$

y la eficiencia

$$\eta = \frac{C_Q C_H}{C_P} \quad (7.3.4)$$

en general las dependencias de las variables con el número de Reynolds y con la rugosidad adimensional es débil, por lo cual las curvas características grafican C_H en función de C_Q , η en función de C_Q y C_P ídem.

Supongamos que tengo una bomba funcionando en su punto de máxima eficiencia, y tengo que bombear más caudal con el mismo H con una bomba de similares características. Entonces tengo que mantener los mismos números adimensionales.

$$C_H = \frac{gH}{\omega_1^2 D_1^2} = \frac{gH}{\omega_2^2 D_2^2} \quad (7.3.5)$$

$$C_Q = \frac{Q_1}{\omega_1 D_1^3} = \frac{Q_2}{\omega_2 D_2^3} \quad (7.3.6)$$

Por mantener el C_H , $\omega_1 D_1 = \omega_2 D_2$, y por mantener además el C_Q resulta

$$\frac{D_2}{D_1} = \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} \quad (7.3.7)$$

y por lo tanto

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}} \quad (7.3.8)$$

es preciso aumentar el diámetro y bajar la frecuencia de rotación. El cambio en potencia va a ser

$$\frac{P_{f2}}{P_{f1}} = \frac{Q_2}{Q_1} \quad (7.3.9)$$

Ojo: Uno no puede mantener C_Q alegremente por ejemplo cambiando caudal y velocidad angular nada más. Si uno duplica la velocidad angular con el mismo H , el caudal no se duplicará (será mayor que eso).

Esto es un escaleo con semejanza completa. Si en cambio queremos aumentar el caudal en un factor muy grande (cien o mil), resulta que nos puede quedar una bomba muy muy grande girando muy muy despacio. Esto ocurre cuando uno quiere usar una bomba diseñada para mover mucho caudal a poca altura en la condición inversa, o viceversa.

Buscando un coeficiente que pueda cuantitativizar esto,

$$N_s = \frac{C_Q^{\frac{1}{2}}}{C_H^{\frac{3}{4}}} = \frac{Q^{\frac{1}{2}}\omega}{(gH^*)^{\frac{3}{4}}} \quad (7.3.10)$$

se denomina velocidad específica de la bomba, y se calcula para H^* , el punto de máxima eficiencia de la bomba. Idem, se utiliza C_Q^* , C_H^* .

Para N_s entre 0.13 y 1 se prefieren las bombas centrífugas. Para N_s mayor que 3 se utilizan las axiales. Para N_s menor que 0.13 seguramente bombas de desplazamiento positivo. Entre 1 y 3, bombas de flujo mixto (entre axial y centrífuga).

7.4. Turbinas

7.4.1. Números adimensionales y selección de turbinas

Los números adimensionales son equivalentes a los de bombas.

Las curvas de diseño usan velocidad específica con unidades, a saber

$$N_{sp} = \frac{\Omega[RPM]\dot{W}[HP]^{\frac{1}{2}}}{H[ft]^{\frac{5}{4}}} \quad (7.4.1)$$

Para N_{sp} hasta 10 se usan turbinas de impulso de tubería simple, tales como la Pelton. Entre 15 y 100 se utilizan turbinas Francis, y para mayor que 100 se usan turbinas hélice.

7.4.2. Turbinas de impulso

ver p. 719 y siguientes de White.

Capítulo 8

Flujo irrotacional

En este capítulo comenzamos el estudio de flujos externos, que sirven para comprender el movimiento de fluidos alrededor de cuerpos pero también flujos en cavidades grandes, que localmente se asemejan a flujos externos.

Muchos flujos externos presentan grandes regiones en las cuales el movimiento es irrotacional. La *rotación media* de una partícula fluida es medida por la vorticidad, definida como el rotor del campo de velocidad. La existencia de estas grandes regiones irrotacionales es consecuencia de las leyes dinámicas de evolución de la vorticidad, que se obtienen desde luego a partir de las ecuaciones de conservación (es decir a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes).

8.1. Flujos potenciales

La mecánica de fluidos incompresibles de propiedades constantes está gobernada, como ya hemos visto, por las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (8.1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (8.1.2)$$

como se verá hemos considerado fuerzas volumétricas nulas (recordar que si derivan de un potencial pueden incorporarse a la presión). Consideremos ahora una función ϕ que cumpla

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (8.1.3)$$

y veamos si $\mathbf{u} = \nabla \phi$ es solución de (8.1.1)-(8.1.2). Está claro que (8.1.2) se satisface. Para que se satisfaga (8.1.1) deberá existir un campo de presiones p que haga cumplir la igualdad. Esto ocurrirá si y sólo si

$$\nabla \times \left\{ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} \right\} = 0 \quad (8.1.4)$$

Está claro que el primer término y el tercero tienen rotor nulo, intercambiando el orden de derivación. Para ver que el segundo término también es un gradiente operamos

$$u_{i,j}u_j = \phi_{,ij}\phi_{,j} = \frac{1}{2}(\phi_{,j}\phi_{,j})_{,i} = \left(\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2\right)_{,i}$$

por lo cual su rotor es nulo. En conclusión, todos los gradientes de funciones armónicas son campos de velocidad que satisfacen exactamente las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles.

Veamos además que para estas soluciones *el término viscoso es idénticamente nulo*. En efecto,

$$(\nabla^2\mathbf{u})_i = (\phi_{,i})_{,jj} = \phi_{,jji} = 0$$

Sin embargo, *las tensiones viscosas no son nulas*, sólo su efecto neto se anula.

A una función escalar tal que su gradiente es el campo de velocidad se la denomina *potencial de velocidad*. Un flujo que tiene un potencial de velocidad es un *flujo potencial*. Resulta claro que un flujo es potencial si la *vorticidad*,

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} \quad (8.1.5)$$

es nula. Esto explica otra vez la anulación de las fuerzas viscosas, ya que en un flujo incompresible

$$\nabla^2\mathbf{u} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = -\nabla \times \omega \quad (8.1.6)$$

Esta no es la única manera de obtener soluciones exactas a partir de funciones armónicas. Consideremos ahora el caso de un flujo bidimensional, plano, estacionario e incompresible, y sea ψ una función armónica, i.e., $\nabla^2\psi = 0$. El campo de velocidad construido como

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (8.1.7)$$

también es solución exacta de (8.1.1)-(8.1.2). Para ver esto, verificamos en primer lugar que

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

por construcción. Para ver que también se satisface la ecuación de momento alcanza con mostrar que este flujo también es potencial, es decir que la vorticidad es idénticamente nula:

$$\omega = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = \nabla^2\psi = 0$$

La función ψ se denomina *función de corriente*. Es fácil de mostrar que la diferencia de ψ entre dos puntos es igual al caudal volumétrico de fluido que pasa por cualquier línea que una los dos puntos. Esta función es por lo tanto constante a lo largo de cualquier línea que no sea atravesada por el flujo, tal como una pared (pero de nuevo, esto sólo impone la nulidad de la velocidad normal y no de la tangencial). En una línea en la cual la velocidad tangencial es nula la derivada normal de ψ es cero (pero en este caso ψ no será en general constante a lo largo de la línea y por lo tanto la velocidad normal no será nula).

Esto nos abre entonces un enorme abanico de soluciones exactas, pero no son *todas* las soluciones. En particular, si uno desea hallar el campo de velocidad en un dominio confinado por paredes sólidas, uno debería hallar una función armónica cuyo gradiente se anule en las paredes. Esto implica que se anule tanto la derivada normal como las derivadas tangenciales en las paredes, pero la ecuación de Laplace no admite esta condición de contorno. La solución está determinada con sólo imponer la derivada normal, y en general por lo tanto no satisface la nulidad de la derivada tangencial. *Los campos de velocidad irrotacionales e incompresibles son un subconjunto de soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes, el cual no satisface adherencia a las paredes sólidas.*

8.2. Cinemática y dinámica de la vorticidad

8.2.1. Ecuación de la vorticidad

De acuerdo a lo visto, tienen que existir soluciones de las ecuaciones de gobierno que no sean potenciales. Bien podría ocurrir que las soluciones potenciales no fueran sino rarezas matemáticas, y que en casos realistas sólo sobrevivieran las soluciones con vorticidad no nula. Para ver que esto no es así y ganar intuición sobre qué flujos pueden ser modelados como flujos potenciales debemos analizar la ecuación de la vorticidad.

Tomando rotor de (8.1.1) llegamos a

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = \mu \nabla^2 \omega + \rho(\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad (8.2.1)$$

Notemos en primer lugar que el miembro de la izquierda no es sino la derivada material de la vorticidad. La ecuación por lo tanto indica que, a lo largo de una trayectoria, la vorticidad cambia como consecuencia de

- la *difusión molecular* de vorticidad, con difusividad $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ igual a la viscosidad cinemática del fluido, y de
- el mecanismo de *estiramiento de vórtices*, vortex-stretching en inglés, asociado con el segundo término de la derecha.

Por simple inspección de (8.2.1) observamos que, si las fuerzas volumétricas son potenciales y las propiedades constantes, *no existen fuentes de vorticidad*. Mientras a una porción material de fluido originalmente irrotacional no “entre” vorticidad por difusión, el fluido se mantendrá en movimiento irrotacional.

Las paredes sólidas son una fuente básica de vorticidad, la cual desde allí se difunde al seno del fluido. Esta asimismo puede amplificarse por vortex-stretching, *salvo que el movimiento sea bidimensional*, ya que el término correspondiente es idénticamente nulo. En movimientos bidimensionales, por lo tanto, la vorticidad cumple la ecuación del calor (y el máximo está en el borde).

8.2.2. Teorema de circulación de Kelvin

La vorticidad tiene propiedades en común con el campo magnético, provenientes en particular de ser campos de divergencia nula. En particular, las líneas de vorticidad

no pueden terminar en el seno del fluido, deben cerrarse sobre sí mismas o terminar en una pared. Por el teorema de Stokes, el flujo de vorticidad en una superficie limitada por una curva C es independiente de la superficie particular elegida, y se lo conoce como *circulación*.

$$\Gamma = \int_S \omega \, dS = \int_S \nabla \times \mathbf{u} \, dS = \int_C \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, d\gamma \quad (8.2.2)$$

Kelvin, en 1868, introdujo el concepto de circulación y demostró que *en un flujo barotrópico (de los cuales el incompresible es un caso particular) con fuerzas volumétricas conservativas, y en ausencia de efectos viscosos, la circulación a lo largo de una curva material C es constante en el tiempo*. Este resultado se conoce como teorema de circulación de Kelvin, y sólo es válido si el movimiento es observado desde un referencial inercial.

8.2.3. Generación de vorticidad

Fuera de las paredes, si el flujo no es barotrópico o existe una rotación global del sistema (como en flujos geofísicos), puede generarse vorticidad en el seno del fluido.

Para ello consideraremos una aproximación muy utilizada de las ecuaciones de Navier-Stokes, en las cuales sólo se considera el efecto de las variaciones de densidad en el término boyante. Supongamos que ρ_0 es una densidad de referencia del fluido, del cual la densidad real ρ se desvía sólo levemente. Sea $\mathbf{g}$, por otro lado, la gravedad. Entonces puede demostrarse que, en un cierto sentido que puede establecerse rigurosamente, el campo de velocidad puede considerarse incompresible y las ecuaciones se escriben

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (8.2.3)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (8.2.4)$$

La ecuación de vorticidad en un sistema no inercial que está rotando a velocidad angular Ω , tomando asimismo en cuenta los efectos de no barotropía, es

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega + 2\Omega) \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nu \nabla^2 \omega \quad (8.2.5)$$

Notar que en un flujo barotrópico, por ser la densidad función únicamente de la presión, $\nabla \rho$ y ∇p son paralelos. Notar también que en este caso, aún sin gradientes de densidad, existe una fuente de vorticidad que es $2\Omega \cdot \nabla \mathbf{u}$. Si z es la dirección de Ω , esto es $2|\Omega| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}$. Si este fuera el único término, resultaría

$$\frac{D\omega_z}{Dt} = 2|\Omega| \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \frac{D\omega_x}{Dt} = 2|\Omega| \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad \frac{D\omega_y}{Dt} = 2|\Omega| \frac{\partial u_y}{\partial z} \quad (8.2.6)$$

en particular, cualquier flujo elongacional en la dirección z da origen automáticamente a vorticidad en esa dirección. La rotación planetaria es determinante en los flujos geofísicos, que a gran escala contienen en general mucha vorticidad.

8.2.4. Consecuencias en cuanto a la existencia de flujos irrotacionales

Como hemos visto, la vorticidad penetra en el fluido por mecanismos difusivos que pueden pensarse por analogía como la difusión del calor. Intuitivamente, si una corriente “fría” (con muy poca vorticidad) incide sobre un cuerpo sólido cuyas paredes están “calientes” (allí se genera la vorticidad), la temperatura del fluido sólo se afectará en una delgada capa en las inmediaciones del cuerpo y en la estela del mismo. Aquí debemos tener cuidado con la analogía, ya que a diferencia de la temperatura la vorticidad puede amplificarse, y por lo tanto nada garantiza que la estela tenga poca vorticidad.

Sin embargo vemos que, fuera de las capas límites y aguas arriba de cualquier estela presente en el flujo, un flujo irrotacional se mantendrá irrotacional y por lo tanto las soluciones exactas potenciales serán aplicables.

8.3. Flujos irrotacionales ejemplo

Recordemos las condiciones que cumple un flujo irrotacional, tanto en coordenadas cartesianas como polares

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad (8.3.1)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (8.3.2)$$

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (8.3.3)$$

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (8.3.4)$$

$$0 = \omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (8.3.5)$$

8.3.1. Corriente uniforme

$$u_x = U_\infty \quad u_y = 0 \quad (8.3.6)$$

$$\psi = U_\infty y + C_1 \quad \phi = U_\infty x + C_2 \quad (8.3.7)$$

8.3.2. Fuente-sumidero

Tomamos una fuente o sumidero cilíndrico, tal como un tubo delgado perforado que emite un caudal Q . La longitud del cilindro es b , por lo que Q/b es el caudal por unidad de longitud. Entonces

$$u_r = \frac{Q}{2\pi b r} = \frac{m}{r} \quad (8.3.8)$$

$$\psi = m\theta, \quad \phi = m \ln r \quad (8.3.9)$$

8.3.3. Vórtice irrotacional

Veamos ahora un flujo irrotacional *con* circulación. Tomemos

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \frac{K}{r} \quad (8.3.10)$$

provenientes de

$$\psi = -K \ln r, \quad \phi = K\theta \quad (8.3.11)$$

La circulación a lo largo de cualquier camino que contenga al origen es

$$\Gamma = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi K \quad (8.3.12)$$

Si el camino encierra más de un vórtice, la circulación será la suma de las circulaciones de todos los vórtices contenidos.

8.3.4. Cuerpo semi-infinito de Rankine

Ver del White. p. 502.

8.3.5. Cilindro sin circulación

Los flujos potenciales pueden componerse (sumarse, multiplicarse por una constante, etc.). Describen flujos alrededor de cuerpos que tengan la forma de sus líneas de corriente.

La combinación de una corriente uniforme con un doblete nos permite obtener un flujo alrededor de un cilindro.

$$\phi = U_\infty \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta, \quad \psi = U_\infty \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \quad (8.3.13)$$

Las componentes de velocidad son

$$u_r = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta, \quad u_\theta = -U_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (8.3.14)$$

de donde la velocidad en la superficie del cilindro es

$$u_\theta|_{r=a} = 2U_\infty \sin \theta \quad (8.3.15)$$

La fuerza que ejerce el flujo en cada punto sobre el cilindro, que en el caso de un flujo invíscido corresponde sólo a la presión, se expresa en forma adimensional como

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (8.3.16)$$

La simetría de esta distribución de presión indica que el flujo *no ejerce fuerza de arrastre alguna sobre el cilindro*.

Es más, puede demostrarse que en un flujo irrotacional la fuerza de arrastre sobre *cualquier* cuerpo en movimiento estacionario es nula. Este resultado, tan distinto de la observación experimental, es conocido como *Paradoja de D'Alembert*.

La respuesta a la paradoja no proviene de haber despreciado la fuerza de corte en la pared, o aún el efecto de la adherencia del fluido a la pared que genera capas límites con grandes gradientes de velocidad. En realidad en cuerpos "no aerodinámicos" la fuerza de arrastre proviene mayormente de la presión, en particular de la no recuperación de la presión en la zona trasera de los cuerpos. El flujo se desprende y en los puntos de estancamiento traseros la presión es sensiblemente inferior a la de la zona delantera. Esto es posible porque la separación de la capa límite introduce mucha vorticidad en la zona de estela, y por lo tanto la ecuación de Bernoulli no vale.

El C_p de un cilindro real se ve en la Fig. 7.13 del White. El C_p , que debería aumentar a partir de la posición angular 90° , no lo hace.

8.4. Drag, drag, drag

8.4.1. Coeficiente de drag

La fuerza de arrastre, como decíamos, no es nula y se mide en forma adimensional por el coeficiente de arrastre o de drag

$$C_D = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A} \quad (8.4.1)$$

donde A es el área (normalmente la frontal, pero también puede ser el área mojada o el área en planta). Este coeficiente incorpora tanto los efectos de la asimetría de presión como los de las tensiones de corte superficiales.

El C_D de un cilindro vs. el Re se ve en la Fig. 7.16 del White. Puede verse que para Re alto es esencialmente uno pero a $Re = 2 \times 10^5$ se observa una transición, debida a que la capa límite se vuelve turbulenta lo cual reduce la separación. Algo similar ocurre en la esfera y en otros flujos parecidos.

Descripción del flujo alrededor de un cilindro en función del Re . Fig. 5.5 p. 94 de Vogel.

8.4.2. Coeficientes de drag de algunas formas

Fig. 6.4 del Vogel. Idem a Tabla 7.2 del White. Ver Fig. 7.15 de White, p. 464!!

Ver también Tabla 7.2 de Vogel.

El C_D de un auto moderno está entre 0.25 y 0.30, lo cual debería reducirse a 0.20-0.25 en la próxima década (ya sería todo un avance sacar los espejos retrovisores!!).

8.5. Algunos flujos irrotacionales ejemplo adicionales

8.5.1. Cilindro con circulación

Si bien para un flujo irrotacional es imposible que el cuerpo experimente una fuerza de arrastre, sí es posible generar una fuerza perpendicular al flujo, una fuerza de *sustentación* o de *lift*. Para verlo en el caso del cilindro, consideremos el flujo irrotacional que surge de sumar al que vimos de un cilindro sin circulación un vórtice de circulación Γ .

$$\psi = U_{\infty} \left(r - \frac{a}{r} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (8.5.1)$$

de donde

$$u_{\theta}|_{r=a} = -2U_{\infty} \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (8.5.2)$$

y por Bernoulli

$$p|_{r=a} = p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho \left[U_{\infty}^2 - \left(-2U_{\infty} \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \right] \quad (8.5.3)$$

y la circulación hace que la presión no sea totalmente simétrica respecto de $\theta = 0$ por lo cual se genera una fuerza de *sustentación* o de *lift*

$$L = - \int_0^{2\pi} p(r = a, \theta) \sin \theta a \, d\theta = \rho U_{\infty} \Gamma \quad (8.5.4)$$

Esta relación del lift con la circulación se da sólo para cilindros circulares, se cumple para cilindros de cualquier forma y es conocida como *Teorema de Kutta-Zhukovski*.

8.5.2. Ondas de gravedad

Otro ejemplo interesante de aplicación de flujos irrotacionales son las ondas que se forman en las superficies libres de los líquidos. Vamos a considerar casos de amplitud a pequeña tanto con respecto a la longitud de onda λ como respecto a la profundidad del líquido H . Vamos a considerar también ondas cuya frecuencia sea mucho mayor que la de rotación de la tierra, y un fluido poco viscoso. La situación prototípica es el agua de un estanque o lago.

Vamos a utilizar el potencial de velocidad

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (8.5.5)$$

Las condiciones de contorno cinemáticas, si el fondo es horizontal y obviamente está quieto, y si la superficie libre está descrita por la función $\eta(x, t)$ son

$$w|_{z=-H} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0 \quad (8.5.6)$$

$$w|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} \simeq \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (8.5.7)$$

Si asumimos para este problema una solución en forma de onda,

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t), \quad \phi = f(z) \sin(kx - \omega t) \quad (8.5.8)$$

y reemplazamos en (8.5.5) obtenemos

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0 \quad (8.5.9)$$

de donde

$$\phi = \frac{a\omega}{k} \frac{\cosh k(z+H)}{\sinh kH} \sin(kx - \omega t) \quad (8.5.10)$$

Este es el potencial de velocidad producido por el movimiento η de la superficie libre, como si hubiéramos puesto una chapa acanalada de número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ desplazándose a velocidad $c = \frac{\omega}{k}$. Calculemos la presión en $z = \eta$. A partir de

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0$$

resulta

$$p(x, \eta(x, t), t) = -\rho g a \cos(kx - \omega t) + \rho \frac{a\omega^2}{k} \frac{\cosh k(\eta + H)}{\sinh kH} \cos(kx - \omega t) \simeq a\rho \left(-g + \frac{\omega^2}{k \tanh(kH)} \right) \cos(kx - \omega t)$$

Esta es la presión que debe ejercer la chapa para forzar el flujo. Vemos que, en el caso en que la chapa se mueva a velocidad

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kH)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right)} \quad (8.5.11)$$

la chapa *no ejerce fuerza alguna sobre el líquido*. En otras palabras, podemos retirar la chapa y el movimiento seguirá por sí solo, es decir, se trata de una *onda*.

Para aguas *profundas*, aproximación que se cumple si $H > 0.28\lambda$, $c = \sqrt{\frac{g}{k}}$. Al aproximarse a la playa las ondas cambian su longitud de onda pero no su frecuencia. El período dominante de olas de viento es de aproximadamente 10 segundos. Esto corresponde a una longitud de onda de unos 150 metros en aguas profundas, y a una velocidad de onda (de fase) de 15 m/s. La velocidad *de grupo* (en particular de transporte de energía por la onda), en aguas profundas, es la mitad de la velocidad de fase, 7.5 m/s.

Notar que en general las ondas son *dispersivas*, en cuanto a que su velocidad de avance depende de la longitud de onda, yendo más rápido las ondas más largas. Las ondas dispersivas *no* satisfacen la ecuación de D'Alembert.

Para aguas *someras* (shallow waters), aproximación que vale con buena precisión si $H < 0.07\lambda$, la velocidad de fase es $c = \sqrt{gH}$. Es por lo tanto independiente de la longitud de onda: Las ondas muy largas respecto de la profundidad se comportan de forma no dispersiva y por lo tanto η satisface

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (8.5.12)$$

Esta ecuación aparece también (lo cual sirve de interpretación) cuando se considera que la velocidad vertical es lineal en z . Entonces

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} \simeq \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-H} + H \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -H \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

de donde

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -H \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (8.5.13)$$

uniendo con la ecuación de presión nula en la superficie:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} \simeq -g\eta \quad (8.5.14)$$

y derivando (8.5.13) respecto de t y (8.5.14) dos veces respecto de x se obtiene (8.5.12).

Cabe destacar que, en aguas profundas, la velocidad de las ondas muy pequeñas no tiende a cero con λ por la aparición de fenómenos de capilaridad. Para ondas capilares la velocidad es aproximadamente

$$c \simeq \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}} \quad (8.5.15)$$

Esto da un mínimo en la curva de c en función de λ que para agua a 20 grados centígrados ocurre en $\lambda_m \simeq 1.73$ cm, con $c_m \simeq 23.2$ cm/s.

Ejercicios

a) Calcular en ángulo de difracción de una onda de longitud de onda λ al pasar de una zona de profundidad H_1 a otra de profundidad H_2 .

b) Demostrar que las trayectorias de las partículas son elipses, que a una coordenada vertical z_0 , cumplen

$$\frac{\xi^2}{\left[a \frac{\cosh k(z_0+H)}{\sinh kH} \right]^2} + \frac{\zeta^2}{\left[a \frac{\sinh k(z_0+H)}{\sinh kH} \right]^2} = 1 \quad (8.5.16)$$

Mencionemos un efecto *de segundo orden*, que hace que las trayectorias no sean en realidad elípticas, sino que las partículas tengan una velocidad neta en la dirección de la onda. Esta velocidad, conocida como *drift de Stokes* vale

$$\bar{u}_S = a^2 \omega k \frac{\cosh 2k(z_0 + H)}{2 \sinh^2 kH} \quad (8.5.17)$$

c) Demostrar que la fluctuación de presión cumple

$$p'(x, z, t) \simeq \rho g a \frac{\cosh k(z + H)}{\cosh kH} \cos(kx - \omega t) \quad (8.5.18)$$

y deducir de allí que un sensor de presión ubicado a profundidad D sólo captará las ondas de longitud de onda comparable o superior a D .

d) Demostrar que, para una onda de gravedad, la energía cinética por longitud de onda es igual a la energía potencial por longitud de onda, y ambas son iguales a $\frac{1}{2} \rho g a^2$ (equipartición de la energía).

Capítulo 9

Flujo en la capa límite y otros flujos relacionados

9.1. Soluciones exactas laminares

9.1.1. Flujo paralelo entre placas planas

Sea $\mathbf{u} = (u, v, w)$, con $v = w = 0$, con lo cual $u = u(y, z, t)$ por la incompresibilidad. En el caso estacionario, si tenemos dos placas entre $y = 0$ e $y = h$, con la placa superior en movimiento con $u = V$ y la placa inferior inmóvil, la solución exacta es

$$u(y) = V \frac{y}{h} - \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (9.1.1)$$

Obs.: Discutir caso general de flujo paralelo en conductos de sección arbitraria.

9.1.2. Primer problema de Stokes

Este problema representa una capa acelerada súbitamente, con $\frac{dp}{dx} = 0$. En este caso también tenemos flujo paralelo, satisfaciendo la ecuación

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (9.1.2)$$

con $u(y, t = 0) = 0$, $u(y = 0, t) = U$. La solución exacta es

$$u(y, t) = U \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right] \quad (9.1.3)$$

Notemos también que la vorticidad cumple la misma ecuación con una delta de Dirac como condición inicial.

Si definimos el ancho $\delta(t)$ de la “zona en movimiento” como la zona donde $u > 0.05U$, resulta $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} = 1.38$. Esto implica

$$\delta(t) \simeq 2.76\sqrt{\nu t} \quad (9.1.4)$$

Mostrar que resolviéndolo por volúmenes de control con un perfil parabólico

$$u = U \frac{(y - \delta(t))^2}{\delta(t)^2}$$

si $y < \delta$, y $u = 0$ si no. Planteando la conservación de cantidad de movimiento, $\delta(t) \simeq 3.4\sqrt{\nu t}$.

Otra aplicación es la difusión de una hoja vorticiosa, pero este flujo es inestable.

9.1.3. Segundo problema de Stokes

Este problema representa el flujo encima de una placa oscilante.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u(0, t) = U \cos(\omega t), \quad u(y \rightarrow +\infty, t) < +\infty \quad (9.1.5)$$

y buscamos la solución periódica en t . La solución exacta es

$$u = U e^{-y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} \cos\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) \quad (9.1.6)$$

con lo cual la longitud de penetración de la perturbación periódica introducida por la placa es del orden de $\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$.

9.1.4. La aproximación de capa límite

La aparición de capas límites es una propiedad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes. Surgen como consecuencia de la continuidad de la velocidad tangencial en presencia de viscosidad (no es posible imponer condiciones de contorno a la velocidad tangencial si $\mu = 0$). Para su análisis se utiliza una aproximación conocida como "de capa límite", que no vale sólo para ellas sino en general para flujos "esbeltos" (slender flows).

Deducción de las ecuaciones como en la clase de 2002.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (9.1.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9.1.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (9.1.9)$$

Discutir turbulencia, fluctuaciones, tensiones de Reynolds.

9.1.5. Solución exacta para una placa plana en flujo laminar

Solución de Blasius. Si ψ es la función de corriente

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9.1.10)$$

existe para el flujo sobre una placa plana una variable de autosemejanza

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} \quad (9.1.11)$$

tal que $u(x, y) = U g(\eta(x, y))$. En este caso notar que

$$\psi(x, y) = \int_0^y u(x, \hat{y}) d\hat{y} = U\delta(x) \int_0^{\frac{y}{\delta}} g(\eta) d\eta = U\delta(x) f(\eta(x, y))$$

con $f' = g$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= U f''(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = U f''(\eta) \left(-\frac{y}{\delta^2}\right) \frac{d\delta}{dx} = -\frac{U\eta f''}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -U \left(\frac{d\delta}{dx} f + \delta f'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = -U \frac{d\delta}{dx} (f - \eta f') \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = U \frac{d\delta}{dx} \left(\frac{f'}{\delta} - \frac{f'}{\delta} - \frac{\eta}{\delta} f''\right) = -\frac{U\eta f''}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \\ \frac{\partial^2 u^2}{\partial y} &= \frac{U f'''}{\delta^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de capa límite obtenemos

$$-\left(\frac{U\delta}{\nu} \frac{d\delta}{dx}\right) f f'' = f'''$$

y para que haya una solución de autosemejanza (f dependiendo sólo de η) es necesario que el paréntesis sea una constante. Esto se cumple si

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

con lo cual la ecuación se transforma en

$$\frac{1}{2} f f'' + f''' = 0 \quad (9.1.12)$$

con las condiciones de borde

$$f'(+\infty) = 1, \quad f(0) = f'(0) = 0$$

La solución puede verse en Kundo (p. 311). Notar la velocidad transversal v .

Es importante el dato de **tensión de corte en la pared**, ya que de su integral surge la fuerza de arrastre D sobre la placa. Resulta

$$\tau_w = \frac{0.332\rho U^2}{\sqrt{Re_x}}, \quad C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad (9.1.13)$$

es decir que decrece con x como $x^{-\frac{1}{2}}$, como resultado del crecimiento de la capa límite. La fuerza total de arrastre hasta la posición x es, integrando,

$$D = \frac{0.664\rho U^2 x}{\sqrt{Re_x}}, \quad C_D = \frac{1.33}{\sqrt{Re_x}} \quad (9.1.14)$$

9.1.6. Espesores de capa límite y ecuación integral de von Karman

De la solución de Blasius podría definirse como espesor de la capa límite el espesor tal que $u = 0.99U$, dando por resultado

$$\delta_{99}(x) = 4.9\sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \quad \frac{\delta_{99}}{x} = \frac{4.9}{\sqrt{Re_x}} \quad (9.1.15)$$

Espesor de desplazamiento: Distancia a la cual la pared debería ser desplazada in flujo sin fricción hipotético para que no cambie el flujo másico.

$$\delta^* = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (9.1.16)$$

que, para la solución de Blasius, da $\delta^* = 1.72\sqrt{\nu x/U}$.

Espesor de cantidad de movimiento: Este espesor, θ , es por definición aquel que hace que $\rho U^2 \theta$ coincida con la pérdida en flujo de cantidad de movimiento debida a la presencia de la capa límite. Resulta

$$\theta = \int_0^{+\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (9.1.17)$$

. Para la solución de Blasius resulta $\theta^* = 0.664\sqrt{\nu x/U}$.

Utilizando estos espesores de desplazamiento y realizando balances de masa y cantidad de movimiento obtenemos la ecuación integral de von Karman

$$\frac{d}{dx} (U^2 \theta) + \delta^* U \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (9.1.18)$$

Índice de figuras

Índice de cuadros